Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale

Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matetmatica”

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matetmatica”

[FM] A.Faedo, L.Modica, “Analisi I, lezioni”

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, “Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile”

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell’anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per ‘parte dell’esame scritto’,
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell’appello,
N è il numero della parte dell’esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell’esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d’esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

II GRUPPO DI ESERCITAZIONE, IIT: somme in progressione geometrica, allineamenti decimali, *estremo superiore ed estremo inferiore.*

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del secondo gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

Testi di esame del secondo gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

CONFRONTO TRA DEFINIZIONI

estremo inferiore m di un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$		*estremo superiore* M di un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$
1)	per ogni a in A	
$m \leq a$		$a \leq M$
2)	per ogni x in $\mathbf{R}$ se per ogni a in A	
$x \leq a$ allora $x \leq m$		$a \leq x$ allora $M \leq x$
	ovvero a parole	
m è il *massimo* tra i *minoranti* di A		M è il *minimo* tra i *maggioranti* di A.

ESERCIZIO n. 1 Quali sono gli estremi superiori dei seguenti insiemi:

$\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$,

$\left\{\frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad x > 1\right\}$, $\left\{\frac{n+1}{n-1} : n \in \mathbf{N}\ ,\quad n > 1\right\}$,

$\left\{\frac{x-1}{x+1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad x > 1\right\}$, $\left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbf{N}\ ,\quad n > 1\right\}$,

* $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$,

* $\left\{\frac{n}{m} :\ m,\ n \in \mathbf{N}\ ,\quad n^2 \leq 3m^2\right\}$.

ESERCIZIO n.2 Quali sono valori di massimo tra gli estremi superiori trovati nel precedente esercizio?

ESERCIZIO n.3 a) Quali sono gli estremi inferiori dei seguenti insiemi:

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$, $\left\{\frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad x > 1\right\}$,

$\{x \in [2; 7[:\quad \sin x = 0\}$, $\left\{x \in [0; 1] :\ x^2 - x + 1 \geq 0\right\}$.

b) Quali sono minimi?

$\circ$ COMPLEMENTI: dalla *completezza* di $\mathbf{R}$ (o meglio dall'esistenza dell'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ limitato non vuoto) si ottiene la seguente intuitiva proprietà, detta di *Archimede*, del sistema dei numeri reali:

$$\text{per ogni } x \in \mathbf{R} \text{ vi è } n \in \mathbf{N} \text{ per cui } n \geq x$$

in altre parole $\mathbf{N}$ *è illimitato superiormente in* $\mathbf{R}$.

Per dedurlo sui ragiona come segue:
se $\mathbf{N}$ fosse limitato superiormente esisterebbe $a := \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$.
In particolare $a \geq n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi a sarebbe maggiore anche di tutti i numeri pari: $a \geq 2m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.
Quindi $\frac{a}{2} \geq m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.
ma ciò non è possibile poichè essendo $a = \sup \mathbf{N}$ è il più piccolo dei *"maggioranti"* di $\mathbf{N}$.

$\circ$ ESERCIZIO n. 4 Si provi che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$.

ESERCIZIO n. 5 Si verifichi che $1 + a + a^2 \ldots + a^n \; = \; \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, $\; a \neq 1$

$\circ$ ESERCIZIO n. 6 a)$\circ$ Osservando che se $x \geq 1$ allora $2x \geq x + 1$ si provi: $2^n \; \geq \; n$
[Suggerimento $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geq \ldots$].
b) Si provi che $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$.
c)$*$ Analogamente si provi che se $|a| < 1$ allora $a^n \to 0$ per $n \to \infty$.

ESERCIZIO n. 7 a) Mostrare che se $|a| < 1$: $1 + a + a^2 \ldots + a^n \quad \to \quad \dfrac{1}{1 - a}$, $\quad n \to \infty$
[Osservazione: ciò si scrive usualmente come *"somma infinita"* $1 + a + a^2 \ldots + a^n + \ldots = \frac{1}{1-a}$].
b) Si calcoli l'estermo superiore $\sup\{1 + a + \ldots + a^n : \; n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0;1[$.
b)* Si calcoli l'estermo inferiore $\inf\{1 - a + a^2 - a^3 \ldots + (-1)^n a^n : \; n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0;1[$.

ESERCIZIO n. 9
a) Si provi che $0,\overline{9} \; = \; 1$.
b) Si provi che $0,\overline{001} \; = \; \dfrac{1}{99}$
c) A che frazione sarà quindi uguale $0,\overline{0\ldots01}$ con 0 ripetuto nel periodo k volte?
