

Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme di tutte le possibili soluzioni) della seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{x^2 - y}{2x}, \quad x > 0$$

$$y' = -\frac{y}{2x} + \frac{x}{2}, \quad y' + \frac{1}{2x} y = \frac{x}{2}$$

L'equazione assegnata è un'eq. diff. lineare non omogenea del primo ordine.

per $x > 0$ valutiamo $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \log|x| + c$

$$e^{\int \frac{dx}{2x}} = e^{\log \sqrt{|x|} + c} = \sqrt{|x|} e^c$$

$$= e^c \sqrt{|x|} = \sqrt{x}, \quad \text{per } x > 0 \text{ (scegliamo } c=0)$$

moltiplichiamo l'eq. diff. assegnata per \sqrt{x}

$$\sqrt{x} y' + \frac{\sqrt{x}}{2x} y = \frac{x \sqrt{x}}{2}, \quad x > 0$$

$$\sqrt{x} y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y = \frac{1}{2} x^{3/2}, \quad x > 0$$

osserviamo che $(\sqrt{x} y)' = D(\sqrt{x} y) = \sqrt{x} y' + (D\sqrt{x}) y$

$$= \sqrt{x} y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y, \quad \text{per la regola di derivazione del prodotto. Pertanto si ha}$$

• $(\sqrt{x} y)' = \frac{1}{2} x^{3/2}$, da cui effettuando l'integrazione indefinita di ambo i membri, si ha

$$\sqrt{x} y(x) = \int (\sqrt{x} y)' dx = \frac{1}{2} \int x^{3/2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{5/2}}{5/2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\sqrt{x} y(x) = \frac{1}{5} x^2 \sqrt{x} + c \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{5} x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2 - y}{2x} \quad \bar{e} \quad \left\{ y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}}, x > 0; c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x > 0$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2 - y}{2x}, x > 0 \\ y(1) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } y_0 \in \mathbb{R}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari sappiamo che $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy assegnato ammette un'unica soluzione definita in $(0, +\infty)$. Per determinare tale soluzione scegliamo la costante "c" nell'integrale generale in modo tale che la soluzione soddisfi la condizione $y(1) = y_0$

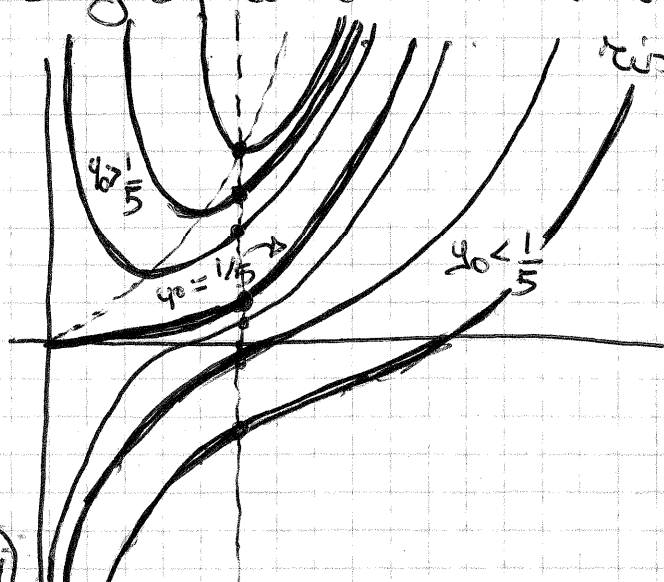
$$y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}}, x > 0 \quad \text{con } y(1) = y_0$$

$$y_0 = y(1) = \left[\frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}} \right]_{x=1} = \frac{1}{5} + c \Rightarrow c = y_0 - \frac{1}{5}$$

da cui la soluzione del problema assegnato è

$$y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right) \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0; \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

Le grafie delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$



risultano i seguenti

[Ricordiamo che per il teorema di Cauchy, di esistenza e unicità, benché, i grafici di 2 soluzioni distinte dell'equazione assegnata non possono intersecarsi]

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine.

$$y' + \frac{y}{x \log x} = x^2, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Valutiamo $\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{1}{\log x} \frac{dx}{x} = \log |\log x| + c$

$$e^{\int \frac{dx}{x \log x}} = e^{\log |\log x| + c} = e^c |\log x| =$$

$$= |\log x| = \begin{cases} \log x, & x > 1 \\ -\log x, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad [\text{scegliamo } c = 0]$$

Moltiplichiamo l'equazione assegnata per $\log x$

$$(\log x) y' + \frac{y}{x} = x^2 \log x, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$((\log x) y)' = x^2 \log x \Rightarrow (\log x) y(x) = \int x^2 \log x \, dx$$

Calcoliamo $\int x^2 \log x \, dx$, servendoci della regola di integrazione per parti.

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx =$$

$f(x) = \log x$	$g(x) = \frac{x^3}{3}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g'(x) = x^2$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

da cui $(\log x) y(x) = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + c$

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} \frac{x^3}{\log x} + \frac{c}{\log x}, \quad x \in (0, 1) \text{ oppure } x \in (1, +\infty)$$

Ricordiamo che possiamo definire le soluzioni di una eq. diff. solo in un intervallo e non in un'unione di intervalli disgiunti; pertanto la restrizione della

funzione $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9} \frac{x^3}{\log x} + \frac{c}{\log x}$ (per un fissato $c \in \mathbb{R}$)

agli intervalli $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$ rispettivamente, devono essere considerate due soluzioni distinte dell'eq. diff. e non l'una come un prolungamento dell'altra, cioè come un'unica soluzione definita in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Osservazione L'integrale generale delle equazioni proposte può essere determinato anche servendosi direttamente della formula risolutiva di Duhamel.

Determinare l'integrale generale della seguente equazione logistica.

$$y' = y - y^2$$

L'eq. diff. assegnata è non lineare, ma a variabili separabili. Determiniamo, innanzitutto, le soluzioni costanti dell'equazione.

$$y - y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1$$

Quindi $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$ sono soluzioni costanti dell'eq. differenziale assegnata.

Supposto $y(x) - [y(x)]^2 \neq 0 \quad \forall x \in X_y$ campo di esistenza della soluzione $y(x)$

dividiamo ambo i membri dell'eq.

diff. per $y - y^2$. Si ha quindi

$$\frac{y'}{y(1-y)} = 1$$

$$y' \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) = 1$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y-1} = 1$$

Servendosi della regola di decomposizione in fattori semplici, si ha

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}, \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

$$1 = A(1-y) + By$$

$$y=0 \Rightarrow A=1; \quad y=1 \Rightarrow B=1$$

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$$

$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y-1} = 1$ Effettuando l'integrazione in definite di ambo i membri si ha

$$\int \frac{y'}{y} dx - \int \frac{y'}{y-1} dx = \int dx$$

$$\log|y| - \log|y-1| = x + c$$

$$\log|y| - \log|y-1| = -\log \frac{|y-1|}{|y|} = -\log \left| 1 - \frac{1}{y} \right|$$

$$-\log \left| 1 - \frac{1}{y} \right| = x + c \Rightarrow \log \left| 1 - \frac{1}{y} \right| = -x - c$$

~~Indichiamo con $\frac{1}{k} = \pm \frac{1}{e^c}$~~

$$\left| 1 - \frac{1}{y} \right| = e^{-x-c} = e^{-c} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{e^c}$$

$$1 - \frac{1}{y} = \pm \frac{e^{-x}}{e^c}$$

indichiamo con $\frac{1}{k} = \pm \frac{1}{e^c}$

$$1 - \frac{1}{y} = \frac{e^{-x}}{k}$$

quindi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$1 - \frac{e^{-x}}{k} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{k - e^{-x}}{k} = \frac{1}{y} \Rightarrow y(x) = \frac{k}{k - e^{-x}}$$

L'integrale generale dell'equazione logistica è quindi costituito da

$$y(x) = 0; \quad y(x) = 1; \quad y(x) = \frac{k}{k - e^{-x}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Cioè $y(x) = 1$ e $y(x) = \frac{k}{k - e^{-x}}, \quad k \in \mathbb{R}$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } y_0 \in \mathbb{R}$$

Indichiamo con X_y il campo di esistenza della soluzione $y(x)$

$$\text{Se } y_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 1, \quad X_y = \mathbb{R}$$

$$\text{Se } y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0, \quad X_y = \mathbb{R}$$

Se $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, imponiamo che la generica soluzione

non costante $y(x) = \frac{K}{K - e^{-x}}$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = y_0$

$$y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad y_0 = y(0) = \frac{K}{K-1} \Rightarrow \frac{K}{K-1} = y_0$$

$$1 - \frac{1}{K} = \frac{1}{y_0} \quad ; \quad 1 - \frac{1}{y_0} = \frac{1}{K} \quad ; \quad K = \frac{y_0}{y_0 - 1}$$

quindi

$$y(x) = \frac{y_0}{\frac{y_0-1}{y_0-1} - e^{-x}} \quad ; \quad y(x) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0-1)e^{-x}}$$

Pertanto $\forall y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0-1)e^{-x}}$$

Se $y_0 \in (0, 1)$ $y_0 - (y_0-1)e^{-x} = y_0 + (1-y_0)e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow X_y = \mathbb{R} \quad [y_0 \in (0, 1) \Rightarrow y_0 > 0 \text{ e } 1-y_0 > 0]$

Se $y_0 \in (1, +\infty)$

$$y_0 - (y_0-1)e^{-x} = 0 \quad ; \quad y_0 = (y_0-1)e^{-x} \quad ; \quad e^x = \frac{y_0-1}{y_0}$$

$$y_0 > 1 \Rightarrow \frac{y_0-1}{y_0} > 0 \quad ; \quad x = \log\left(\frac{y_0-1}{y_0}\right) = -\log\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)$$

$$y_0 > 1 \Rightarrow \frac{y_0}{y_0-1} > 1 \Rightarrow \log\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right) > 0$$

$$X_y = \left(-\log\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right); +\infty\right)$$

Se $y_0 < 0$

$$y_0 - (y_0-1)e^{-x} = 0 \quad ; \quad e^x = \frac{y_0-1}{y_0} \quad ; \quad e^x = 1 - \frac{1}{y_0}$$

$$y_0 < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y_0} > 1 \Rightarrow x = \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right) > 0$$

$$X_y = \left(-\infty; \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\right)$$