

RIEMANN INTEGRABILITÀ E SOMMABILITÀ IN SENSO GENERALIZZATO

Misurabilità alla Peano-Jordan

- Un n -rettangolo (cartesiano) in \mathbf{R}^n è il prodotto cartesiano di n intervalli: $R = I_1 \times \dots \times I_n$, I_i , $1 \leq i \leq n$ intervalli limitati con o senza estremi inclusi in \mathbf{R} . Gli 1-rettangoli in \mathbf{R} sono i segmenti.

- La misura elementare di un n rettangolo è il prodotto delle differenze degli estremi dei lati.

Definizione se $A \subset \mathbf{R}^n$ non vuoto e *limitato* si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} m_e(R)$: al variare di \mathcal{F} famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in A (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} m_e(R)$: al variare di \mathcal{G} famiglia *finita* di rettangoli con unione contenente A (approssimazione esterna)

Nel caso il valore si dice misura (n -dimensionale) di Peano-Jordan: $m(A)$, $m_n(A)$. Si ha:

- $m(\emptyset) = 0$, • $m(R) = m_e(R)$ se R è rettangolo cartesiano, • $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B$,
- se A e B hanno misura la hanno $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

Integrabilità alla Riemann Una funzione *limitata* f a valori in \mathbf{R} si dice Riemann integrabile su un n -rettangolo Q (nulla fuori da Q) se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} \inf_R f m_e(R)$: al variare di \mathcal{F} famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione Q

(approssimazione inferiore)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} \sup_R f m_e(R)$: al variare di \mathcal{G} famiglia *finita* di rettangoli con unione Q (approssimazione superiore)

In tal caso il comune valore si dice integrale di Riemann di f su Q e si indica con $\int_Q f(x) dx$.

Osservazione A è P.-J. misurabile se e solo se χ_A è R.-integrabile e $m(A) = \int \chi_A$.

Teorema 1.i- se $f \geq 0$ allora f è R.-integrabile su Q se e solo se il suo sottografico su Q è P.J.-misurabile in \mathbf{R}^{n+1} . Nel caso $m_{n+1}(\{(x, y) : x \in Q, 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_Q f(x) dx$.

ii- una funzione continua limitata f su un n -rettangolo R è R.-integrabile.

• Dai teoremi degli zeri e di Weierstrass se R è chiuso segue: vi è $\xi \in R$ e $\frac{1}{m(R)} \int_R f dx = f(\xi)$.

iii- se f e g sono R.-integrabili tale è fg .

• Se $g = \chi_A$ l'integrale di questo prodotto si indica con $\int_A f(x) dx$.

Una funzione costante $f(x) = 14$ su A misurabile è integrabile e $\int_A f = 14m(A)$

Osservazione - I razionali tra 0 ed 1 non sono un insieme misurabile: non contentendo alcun intervallo la misura interna è nulla mentre ogni intervallo contiene un razionale quindi la misura esterna è 1.

- Vi sono sottoinsiemi del piano non limitati per cui i limiti delle misure delle loro intersezioni con quadrati sempre più grandi sono finiti: *e.g.* si consideri l'unione dei rettangoli di basi rispettive $[n-1, n]$ e altezza $\frac{1}{2^{n-1}}$. La somma delle prime N aree è $1 + 1/2 + \dots + 1/2^{N-1} = 2(1 - 1/2^N) \rightarrow 2$

- Analogamente vi sono funzioni non limitate per cui i limiti degli integrali delle "troncate" sono finiti: *e.g.* si consideri la funzione il cui sottografico è l'insieme del precedente esempio ruotato di $\pi/2$.

Conviene quindi estendere il concetto di integrale e di misura a funzioni e domini non limitati come segue:

Sommabilità.

L'idea geometrica della definizione che segue (almeno nel caso di funzioni non negative) è alla lettera quella di misurare la zona tra grafico della funzione e dominio ma limitata da un $n + 1$ -quadrato, quindi prendere "quadrati" sempre più grandi e considerare come integrale il limite che si ottiene.

- Una funzione a valori reali *non negativa* f si dice *sommabile* in senso generalizzato se:
 - $\forall m \in \mathbf{N} \ x \mapsto \min\{f(x), m\}$ è R.-integrabile su $[-m; m]^n$,
 - $\int_{[-m; m]^n} \min\{f(x), m\} dx$ converge in \mathbf{R} per $m \rightarrow +\infty$.

Tale limite si dirà integrale in senso generalizzato e si indicherà con $\int f dx$.

- Una funzione a valori reali si dice sommabile se lo sono la sua parte positiva $\max\{f(x), 0\}$ e la sua parte negativa $\max\{-f(x), 0\}$. Il suo integrale in senso generalizzato sarà la differenza tra quelli delle sue parti.

- Una funzione a valori vettoriali si dirà sommabile se lo sono le sue componenti. Nel caso l'integrale sarà dato dal vettore degli integrali delle componenti.

Teorema 2. Proprietà principali

- 1- le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare;
- 2- il minimo e il massimo tra due funzioni sommabili sono anch'essi sommabili (reticolo),
 - se $f \geq g$ allora $\int f \geq \int g$ (monotonia dell'integrale),
- 3- $|\int f| \leq \int |f|$ (disuguaglianza triangolare),
- 4 - se A e B sono misurabili in senso generalizzato tali sono $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ (semialgebra),
 - se f è sommabile sull'unione allora $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$ (additività).

NOTA: se f e g sono sommabili non è detto che il loro prodotto lo sia: e.g. $f=g=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Se una delle due è limitata si.

- 5- $\int f(x+v) dx = \int f(x) dx$ (invarianza per traslazioni).

6- INTEGRALI ITERATI

Per integrare funzioni continue su insiemi che siano unione di insiemi compresi tra grafici di funzioni continue (con un una variabile in meno) definite a loro volta su insiemi dello stesso tipo fino ad arrivare a unioni di sottoinsiemi del piano compresi tra grafici di funzioni continue su un intervallo, si ha la riduzione degli integrali di più dimensioni ad *integrali iterati di una variabile*, e.g.

$$\int_{g(x,y) \leq z \leq f(x,y), h(x) \leq y \leq k(x), a \leq x \leq b} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \varphi(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

COMPENDIO IN UNA VARIABILE

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I . La *famiglia delle primitive* di f su un intervallo si indica con $\int^x f$.

- Due primitive su un intervallo differiscono per una costante, avendo appunto la stessa derivata: basta applicare il teorema di Lagrange alla loro differenza che ha appunto derivata nulla.

Sempre dal teorema di Lagrange e dalla definizione di integrale si ha:

TEOREMA Se $f = F'$ su $[a, b]$ ed è integrabile allora $\int_{[a,b]} f(y)dy = F(b) - F(a)$.

Ma quali funzioni sono sia derivate che integrabili su un intervallo? Risposta parziale:

TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO : area calcolata con le primitive]

Se f è continua su $[a; b]$ allora oltre ad essere integrabile:

i- La funzione integrale $I(x) = \int_{[a,x]} f(y)dy$ è una primitiva di f per $x \in [a, b]$

ii- per ogni altra F primitiva di f su $[a; b]$ si ha: $\int_{[a,b]} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

- [PRIMITIVE DI BASE]

$f(x)$	$\int^x f = F(x)$
e^x	$e^x + a$
$f = x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$a + \log x$ se $x > 0$ $b + \log(-x)$ se $x < 0$
$\cos x$	$\sin x + a$
$\sin x$	$-\cos x + a$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$a_k + \tan x$ se $x \in]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$a + \operatorname{artan}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$a + \operatorname{arsin}x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$a + \log(x + \sqrt{1+x^2})$ l'inversa di arcosenoiperbolico: $\operatorname{arsinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
$\log x$	$a + x \log x - x$.
$\operatorname{arsin}x$	$a + x \operatorname{arsin}x + \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{artan}x$	$a + x \operatorname{artan}x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

Teorema 3. - CAMBIAMENTO DI VARIABILE ORIENTATO, SOSTITUZIONE Sia $\Phi : y \in [a, b] \mapsto x = \Phi(y) \in [\alpha, \beta]$ con *derivata continua* ed f continua. Allora:

$$\operatorname{segno}(\Phi(b) - \Phi(a)) \int_{[\min\{\Phi(a), \Phi(b)\}, \max\{\Phi(a), \Phi(b)\}]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$$

Definizione Per funzioni di una variabile si può facilmente parlare di integrali *orientati* considerando un senso di percorrenza del segmento ove si integra e cambiando segno all'integrale.

Per questo se $a < b$ si usano le seguenti notazioni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx, \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Quindi la precedente formula si scrive $\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$

Si elencano i principali metodi per il calcolo delle primitive e degli integrali:

- [SOSTITUZIONE] *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $f(x) = \frac{dG}{dt}(t(x)) \frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:

[SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $f(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t) \left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$,
 $dx = \frac{dx}{dt}(t)dt$ per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:

- [PARTI] *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$

- [RAZIONALI SEMPLICI]

PROPOSIZIONE - Ogni polinomio reale in una variabile si esprime come prodotto di fattori del tipo: a , $(x - b)^n$, $((x - c)^2 + d^2)^m$, ove i b sono le radici reali, e la somma degli n e dei $2m$ il grado del polinomio.

- Quindi un rapporto di polinomi, con denominatore di grado maggiore, si scrive come somma di addendi dei seguenti tipi:

$$a, \quad \frac{a}{(x - b)^n}, \quad \frac{a}{((x - c)^2 + d^2)^m}, \quad \frac{ax}{((x - c)^2 + d^2)^n}$$

quindi per calcolare le primitive di rapporti di polinomi basta saper calcolare le primitive di funzioni di questo tipo.

Per il calcolo delle primitive di funzioni di questo tipo ci si riduce mediante un cambiamento di variabile affine al calcolo delle seguenti primitive

$$\frac{1}{x^n} \mapsto \begin{cases} \begin{cases} \log x + a & x > 0 \\ \log(-x) + b & x < 0 \end{cases} & n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases} \quad \frac{x}{(x^2+1)^n} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \log(1+x^2) + a & n = 1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases}$$

$$I_1 =: \int^x \frac{1}{1+x^2} \mapsto \operatorname{artan} x + a,$$

$$I_n =: \int^x \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int^x \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right) = \\ = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n > 1$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA ED INTEGRAZIONE SU CURVE

Lunghezza - Si dice *lunghezza di un cammino* $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continuo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \right\}$$

• Se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$, $h : [c; d] \rightarrow [a; b]$ continua, monotona surgettiva allora $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\varphi)$.

NOTA: intuitivamente la lunghezza definita non corrisponde alla misura dell'immagine ma alla *misura del percorso fatto*. Per cammini che si autointersecano in un numero finito di punti da' proprio una misura dell'immagine.

Definizione Una funzione di una variabile si dice *continua a tratti* su un intervallo se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua.

Una funzione si dice *C^1 -tratti* se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua e derivabile con derivata continua.

Teorema 4 Se $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è continua e C^1 a tratti $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Definizione- [INTEGRAZIONE NON ORIENTATA, DI FUNZIONI] Se γ è un cammino C^1 a tratti in \mathbf{R}^n e g una funzione continua dall'immagine di γ a valori reali, si definisce:

$$\int_{\gamma} g d\mathcal{L} = \int_a^b g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_a^b g(\gamma(t)) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt$$

Definizione Se γ è un cammino *iniettivo* e derivabile in t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0$ allora si definisce la direzione $\tau(\gamma(t_0))$ tangente in $\gamma(t_0)$ come il vettore unitario

$$\tau = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

Definizione [INTEGRAZIONE ORIENTATA, DI VETTORI] Se γ è un cammino C^1 a tratti in \mathbf{R}^n e V una trasformazione continua dall'immagine di γ in \mathbf{R}^n , si definisce

$$\int_{\gamma} V = \int_a^b V(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt = \int_a^b V_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt + \dots + \int_a^b V_n(\gamma(t)) \gamma_n'(t) dt$$

Osservazione Nel caso di cammini iniettivi con derivata non nulla si ha $\int_{\gamma} V = \int_{\gamma} V \bullet \tau d\mathcal{L}$

Teorema 5 - L'integrale di una funzione lungo un cammino *non dipende* ne dal *senso di percorrenza* ne dall'*intensità delle velocità di percorrenza* se si hanno gli *stessi tratti* di andata e ritorno, ovvero:

se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con h monotona, continua e surgettiva allora:

$$\int_{\gamma} g d\mathcal{L} = \int_{\varphi} g d\mathcal{L}$$

- L'integrale di una vettore lungo un cammino *non dipende* da come esso è percorso *tout-court* avendo gli stessi punti iniziali e gli stessi punti di arrivo, ma *dipende* invece dal *verso di percorrenza*, ovvero:

se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con h continua e $\gamma(a) = \varphi(\alpha)$, $\gamma(b) = \varphi(\beta)$

$$\int_{\gamma} V = \int_{\varphi} V$$

mentre se $\gamma(a) = \varphi(\beta)$, $\gamma(b) = \varphi(\alpha)$ allora

$$\int_{\gamma} V = - \int_{\varphi} V$$

ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

Si riportano alcune formule notevoli che riguardano anche la nozione di area di una superficie che si può considerare a livello intuitivo.

- Baricentro di una regione $A \subset \mathbf{R}^n$ di misura non nulla: $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) = \frac{1}{m(A)} \int_A \vec{x} dx_1 \dots dx_n$

- Baricentro di una curva γ o superficie Φ in forma parametrica

$$(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_{\gamma} (x, y, z) d\mathcal{L}, \quad (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\text{Area}(\Phi)} \int_{\Phi} (x, y, z) dVol_2$$

- Integrali nel piano con coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

- Integrali nello spazio con coordinate cilindriche $(x, y, z) = \Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$

$$\int \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

- Integrali nello spazio con coordinate sferiche $(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \theta)$

$$\int \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho^2 \cos \theta d\rho d\varphi d\theta$$

- Volume del solido generato dalla rotazione di una porzione piana "tutta di un pezzo" attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(distanza media dall'asse di rotazione)

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(coordinata del baricentro della regione piana ortogonale all'asse)

=

(area porzione piana)(lunghezza arco percorso del baricentro)

DIM caso in cui l'asse di rotazione è l'asse $x = 0, y = 0$, e D è nel piano $y = 0$. Sia D_α il solido ottenuto ruotando D di α . $vol(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} dx dy dz =$ coordinate cilindriche $\int_{D \times [0; \alpha]} r dr d\varphi dz =$ iterazione $\int_0^\alpha (\int_D r dr dz) d\varphi = m(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m(D)} \int_D r dr dz$

- Area superficie generata dalla rotazione di una curva piana attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(lunghezza curva)(lunghezza arco descritto dal baricentro della curva)

CASI PARTICOLARI

volume di rotazione attorno all'asse delle x del sottografico di $y = f(x) \geq 0 = \frac{\alpha}{2} \cdot \int f^2(x) dx$

volume di rotazione attorno all'asse delle y del sottografico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0 = \alpha \int_a^b x f(x) dx$

area di rotazione attorno all'asse delle x del grafico di $y = f(x) \geq 0 = \alpha \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

area di rotazione attorno all'asse delle y del grafico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0 = \alpha \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$