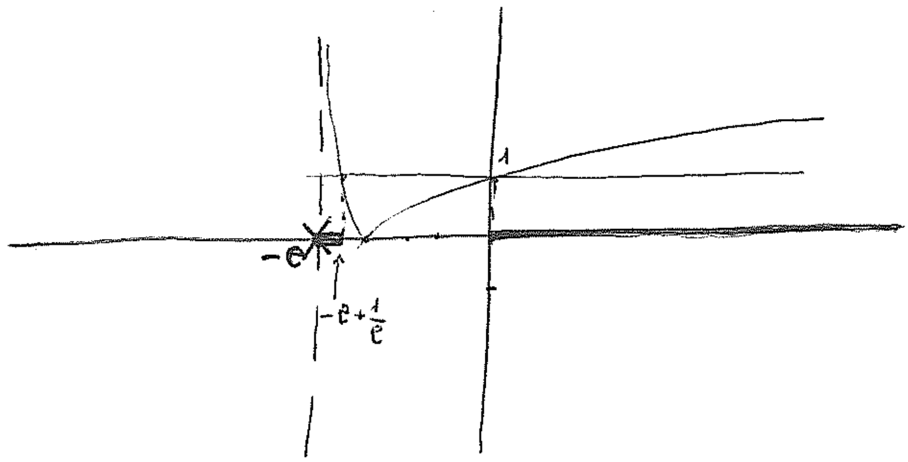
Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità

Jmmy A. Mauro, Vincenzo M. Tortorelli

IV appello **A**: 10 Giugno 2009

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCR.	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo*
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da •;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1	$0 \underset{\neq}{<} x \leq 1$	2	$0{,}57 \sim 0{,}6$
3	$-1 \pm 2i$	4	$3\sqrt{5}$
5			
6	$-\frac{\cos^2 x + 2\sin x + 1}{\sin^3 x}$	7	$\log(1+e)$
8	$1 + c\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \ c \in \mathbb{R}$	9	$-\frac{3}{\sqrt{10}}$
10	$4/3$		

SOLUZIONI PROVA SCRITTA IV APPELLO 10-6-09, GRUPPO A

1 - $\begin{cases} 1-\cos^2 x \geq 0 \\ -1 \leq 3^x - 2 \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos^2 x \leq 1 \\ 1 \leq 3^x \leq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos^2 x \neq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \neq 1 \text{ e } \cos x \neq -1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0 \cdot \pi \leq x \leq 1 \underset{\neq}{<} \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $0 \underset{\neq}{\leq} x \leq 1$

2 - Concentrazione = massa, μg / volume dl, errore relativo reciproco volume ~ ~ (poichè l'errore relativo di volume $< \frac{1}{10}$) errore relativo volume $= \frac{1}{200}$

L'errore relativo del rapporto (valutato con il rapporto delle valutazioni medie sommato al prodotto dei corrispondenti errori) è la somma degli errori relativi:

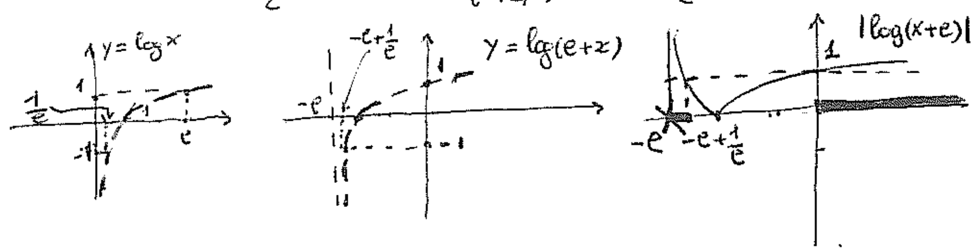
$$\frac{175-50}{175+50} + \frac{1}{200} = \frac{125}{225} + \frac{1}{200} = \frac{5}{9} + \frac{1}{200} = 0,57\overline{5} \sim 0,6$$

3 - $\frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \{-1 + i\,2, -1 - i\,2\}$

4 - Area triangolo $= \frac{1}{2}$ prodotto 2 lati · |seno angolo compreso| $= \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{1 - \left(\frac{1\cdot 3 + (-2)(-2) + (-3)\cdot 1}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{1+4+9}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{2} 14 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{14}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 - 16} = \frac{2}{2}\sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$$

5 -



6 - $f(x) = \frac{\cos x + \sin 2x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x + 2\cos x \sin x}{\sin^2 x} = \cos x \frac{1 + 2\sin x}{\sin^2 x}$

$f'(x) = -\sin x \frac{1+2\sin x}{\sin^2 x} + \cos x \frac{2\sin^2 x \cos x - (1+2\sin x)\, 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} =$

$= -\frac{1+2\sin x}{\sin x} + \cos x \frac{2\sin^2 x \cos x - 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x \cos x}{\sin^4 x} =$

$= -\frac{1+2\sin x}{\sin x} + 2\cos^2 x \sin x \frac{1+\sin x}{\sin^4 x} = -\frac{1}{\sin^3 x}\left(\sin^2 x + 2\sin^3 x + 2\cos^2 x + 2\cos^2 x \sin\right.$

$= -\frac{1}{\sin^3 x}\left(1 + \cos^2 x + 2\sin x\right) = -\frac{\cos^2 x + 2\sin x + 1}{\sin^3 x}$

7 - $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{e^x - 1} \frac{de^x}{dx} \cdot dx \left[\begin{matrix} y = e^x \\ 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow e \leq y \leq e^2 \end{matrix}\right] = \int_e^{e^2} \frac{dy}{y-1} =$

$= \log|y-1|\Big]_e^{e^2} = \log(e^2 - 1) - \log(e-1) = \log\frac{e^2-1}{e-1} = \log(1+e)$

8 - FATTORE INTEGRANTE $y'(x)\, e^{\frac{x^2}{2}} + x\, e^{\frac{x^2}{2}} \cdot y(x) = x\, e^{\frac{x^2}{2}}$,

$(y(x)\, e^{x^2/2})' = x\, e^{\frac{x^2}{2}} = (e^{\frac{x^2}{2}})'$, $y(x) e^{x^2/2} = e^{\frac{x^2}{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$; $y(x) = 1 + c\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$

9 - $m(x^2) = \frac{1}{4}(64+4+36) = 26$ $m(y^2) = 50$ $VAR(X) = \sqrt{26-16}$ $VAR(Y) = 1$

$m(x) = 4$ $m(Y) = 7$ $m(X \cdot Y) = \frac{1}{4}(48+0+16+36) = 12+4+9 = 25$ $COV(X,Y) = -3$ $corr(X,Y) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

0 - Sia X la prima estrazione, Y la pallina rimasta nell'urna

$$P(Y=N) = P(Y=N / X=N)\,P(X=N) + P(Y=N / X=B)\,P(X=B) =$$

[poichè vi è una sola pallina nera $P(Y=N/X=N) = 0$]

$= P(Y=N/X=B)\,\frac{2}{3}$ = [poichè vi sono solo due palline bianche nell'urna rimangono una B e una N] $= \frac{1}{2}\frac{2}{3}$.

(11) Il piano determinato da $x + 2y + 3z = 0$ ha come direzione ortogonale $t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$.

- Quindi il terzo elemento del riferimento da determinare potrà essere scelto tra $\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$ e $-\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$.
- Il primo può essere scelto arbitrariamente tra i vettori le cui coordinate soddisfano l'equazione data, e di lunghezza 1: e.g. $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1)$.
- Il secondo dovrà sia stare sul piano dato, cioè essere ortogonale a $(1,2,3)$, sia essere ortogonale a $(-3,0,1)$, con lunghezza 1: le coordinate (x,y,z) del secondo saranno determinate (intersezione di due piani e una sfera)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ z = 3x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -5x \\ z = 3x \\ x^2(1 + 25 + 9) = 1 \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad (x,y,z) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}\right)$$

- Quindi un sistema di riferimento cartesiano che soddisfi le richieste sarà, per esempio, tra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1), \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-5,3); \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1), \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-5,3), -\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\right)$$

quello con la stessa orientazione di $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, ovvero quello per cui il determinante della matrice associata è positivo.
Si calcola il segno del determinante di tale matrice:

$$\det\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -3(-15-6) - 1(-2) + 5 = 3 \cdot 21 + 2 + 5 > 0$$

Quindi il sistema di coordinate dato da

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1), \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-5,3), \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\right)$$

soddisfa le richieste.

12-a Sia $F(y) = \int_0^y e^{-t^2}dt$ si ha $\frac{d}{dy}F(y) = e^{-y^2}$, quindi:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\frac{1}{x}}^{0} e^{-t^2}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(0) - F(-\tfrac{1}{x})\right) = [\text{derivata di funzione composta}]$$

$$= -\frac{d}{dy}F(-\tfrac{1}{x})\cdot\frac{d}{dx}(-\tfrac{1}{x}) = -e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x\neq 0$$

-b Se $z>1$ $\quad z-\frac{1}{z} > z-1 >$ [retta tangente al grafico concavo di log]

$> \log z$

Ma se $0<z<1$ $\quad \frac{1}{z}>1$ quindi per la precedente applicata ad $\frac{1}{z}$ si ha: $\frac{1}{z} - \frac{1}{\frac{1}{z}} > \log\frac{1}{z} = -\log z$ cioè

$\frac{1}{z} - z > -\log z$ cioè

$z - \frac{1}{z} < \log z \quad . \ 0<z<1$

Quindi poichè $1-\frac{1}{1} = 0 = \log 1$, $z-\frac{1}{z} = \log z$ ha una sola soluzione

(Altra verifica $z-\frac{1}{z} - \log z = f(z)$: $f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} =$

$= \frac{z^2 - z + 1}{z^2}$ [discriminante negativo] $\underset{\neq}{\geq} 0$, quindi f è crescente si annulla per $z=1$, è positiva $z-\frac{1}{z} > \log z$ per $z>1$)

-c $A(x) = \int_{-\frac{1}{x}}^{x} e^{-t^2}dt$, $x>0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt =$

$= \lim_{x\to 0^+} A(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}dt \qquad A'(x) = \frac{d}{d(x)}\left(F(x) - F(-\tfrac{1}{x})\right) =$

$= e^{-x^2} - e^{-1/x^2}\frac{1}{x^2} > 0 \iff e^{-x^2} > e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} \iff$

$\iff$ [passando ai logaritmi] $\quad -x^2 > -\frac{1}{x^2} + \log\frac{1}{x^2} \iff$

$\iff \log x^2 > x^2 - \frac{1}{x^2} \iff$ [punto precedente] $0<x^2<1$

Quindi $A(x)$ ha massimo per $x=1$: $A(1) = \int_{-1}^{1} e^{-t^2}dt$

e su $x>0$ non ha minimo, essendo crescente in $]0,1]$ e decrescente in $[1,+\infty[$

(13). Per distribuzione di un allele per ognuno dei due "genitori", e per indipendenza tra i caratteri alla prima generazione si presentano solo i genotipi {U dominante, u recessivo} cioè $\{C, i\}$, $\{D, a\}$, $\{L, r\}$

La probabilità di un allele alla prima generazione è $\frac{1}{2}$ per ogni carattere.

- Quindi la probabilità di un genotipo alla seconda generazione è: $\frac{1}{4}$ monoibrido, $\frac{1}{2}$ diibrido
  $P^{II}_{UU} = {P^{I}_{U}}^{2}$ $\quad P^{II}_{Uu} = 2P^{I}_{U} P^{I}_{u}$
- Quindi la probabilità dei fenotipi di carattere dominante è $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ per ogni carattere
- Essendo i caratteri indipendenti la probabilità che si manifestino tre dominanti è quindi il prodotto delle precedenti: $\frac{27}{64}$
- Nelle successive generazioni la distribuzione allelica rimane invariata, infatti:
  $P^{II}_{U} = P^{II}_{UU} + \frac{1}{2} P^{II}_{Uu} = {P^{I}_{U}}^{2} + P^{I}_{U} P^{I}_{u} = P^{I}_{U} (P^{I}_{U} + P^{I}_{u}) = P^{I}_{U}$
  quindi $P^{III} = P^{II}$
  In particolare la probabilità di avere fenotipo di allele dominante sarà sempre $\frac{27}{64}$.