Matematica e Statistica per Scienze Ecologiche ed. B.

XIV appello, straordinario: 12 novembre 2010

1. Densità $\frac{M\ g}{V\ cm^3}$ $\quad 1\ lt = 1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 \quad M = 200 - 250 g \quad V = 100 - 200\ cm^3$

$$e_r(M) = \frac{250-200}{250+200} = \frac{50}{450} = \frac{1}{9} \qquad e_r(V) = \frac{200-100}{200+100} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

poiché gli errori relativi non sono di ordine di grandezza inferiore della media aritmetica dei valori di stima massimo e minimo del quoziente $2{,}5\frac{g}{cm^3}$, $1\frac{g}{cm^3}$, e per come son scritti i dati conviene usare la formula completa dell'errore relativo usando come valutazione del quoziente la media aritmetica dei valori di stima massimo e minimo del rapporto

$$e_r(D) = \frac{MAX\,D - MIN\,D}{MAX\,D + MIN\,D} = \frac{2{,}5-1}{2{,}5+1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \sim 0{,}4$$

2. • $\sqrt{3} + 3i = z \qquad |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

• $e^{1+i\frac{\pi}{4}} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}} i = \frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)$

3. $\cos \widehat{vOw} = \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} \qquad v = (-10, -9, -11), \quad w = (9, 10, 11)$

$$= \frac{-10\cdot 9 - 9\cdot 10 - 11\cdot 11}{\sqrt{100+81+121}\ \sqrt{81+100+121}} = -\frac{301}{302} \sim -0{,}99$$

4. Si ordinano i dati $(2, 4, 8; 9, 11, -3, 66, -11)$ in modo crescente

$$-11, -3, 2, 4, 8, 9, 11, 66$$

essendo la dimensione del campione 8 divisibile per 4 i valori di quartile $\frac{-3+2}{2}$, $\frac{4+8}{2}$, $\frac{9+11}{2}$: $-\frac{1}{2}$, 6, 10

la media $\frac{\cancel{-11} - \cancel{3} + \cancel{2}^{3} + 4 + 8 + 9 + \cancel{11} + 66}{8} = \frac{86}{8} = 1{,}075$

la varianza $\frac{121+9+4+16+64+81+121+4356}{8} - \frac{7396}{64} = \frac{4772\cdot 8 - 7396}{64} =$

$$= \frac{38176-7396}{64} = \frac{30780}{64} = \frac{15390}{32} = \frac{7695}{16} \sim 480$$

5 - Un test diagnostico, per individuare una patologia, dà un responso errato con probabilità dell'1%, e tale percentuale di errore aumenta al 5% per un individuo effettivamente malato. Effettuato tale test su una popolazione esso indica che il 25% dovrebbe essere affetto dalla patologia. Qual'è la probabilità che un individuo della popolazione sia effettivamente malato?

Preso a caso un individuo della popolazione si considerano le variabili aleatorie

$$T = \begin{cases} 1 & \text{se il test è positivo} \\ 0 & \text{se il test è negativo} \end{cases} \qquad M = \begin{cases} 1 & \text{se l'individuo è malato} \\ 0 & \text{se l'individuo non è malato} \end{cases}$$

Le ipotesi si traducono

$$\mathbb{P}(T=0 \text{ e } M=1 \text{ o } T=1 \text{ e } M=0) = \mathbb{P}(T+M+MT=1) = 1\%$$

$$\mathbb{P}(T=0 / M=1) = 5\%$$

$$\mathbb{P}(T=1) = 25\%$$

si tratta di calcolare $\mathbb{P}(M=1)$.

RISCRIVIAMO LE IPOTESI IN TERMINI DI PROBABILITÀ PIÙ ELEMENTARI CON CUI POI SI CERCHERÀ DI ESPRIMERE $\mathbb{P}(M=1)$

PER COMODITÀ SI INDICHINO GLI EVENTI IN MODO ABBREVIATO

$(T=0) = T_0 \quad (T=1) = T_1 \quad (M=0) = M_0 \quad (M=1) = M_1$

E LE IPOTESI SONO

$$P(T_0 \wedge M_1 \cup T_1 \cap M_0) = 1\%, \quad P(T_0/M_1) = \frac{P(T_0 \cap M_1)}{P(M_1)} = 5\%, \quad P(T_1) = 25\%$$

poiché $T_0 \cap M_1$ e $T_1 \cap M_0$ sono incompatibili si ha per additività

A) $P(T_0 \cap M_1) + P(T_1 \wedge M_0) = 1\%$

inoltre considerando che T_0 è complementare a T_1

B) $P(M_1) = P(T_0 \cap M_1) + P(T_1 \wedge M_1)$

considerazione analoga per M_0 e M_1 dà la relazione

C) $25\% = P(T_1) = P(T_1 \wedge M_0) + P(T_1 \wedge M_1)$

considerando che $5\% \, P(M_1) = P(T_0 \cap M_1)$ conviene esprimere tutto con $P(T_0 \cap M_1)$ e quindi usare quest'ultima relazione

da A) si ha $P(T_1 \wedge M_0) = 1\% - P(T_0 \cap M_1)$

da C) si ha $P(T_1 \wedge M_1) = 25\% - P(T_1 \wedge M_0) = 25\% - 1\% + P(T_0 \wedge M_1)$

da B) si ha $P(M_1) = 2P(T_0 \wedge M_1) + 24\% = 10\% \, P(M_1) + 24\%$

per cui la probabilità richiesta deve verificare

$$90\% \, P(M_1) = 24\% \quad \text{cioè} \quad P(M_1) = \frac{24}{90} \sim 0{,}2\overline{6}$$

6. Grafico approssimativo $y = \sin x \cdot \sin 4x$
- essendo prodotto di una 2π periodica con una $\frac{\pi}{2}$ periodica è 2π period.
- essendo prodotto di funzioni dispari è una funzione pari

grafico $y = \sin x$

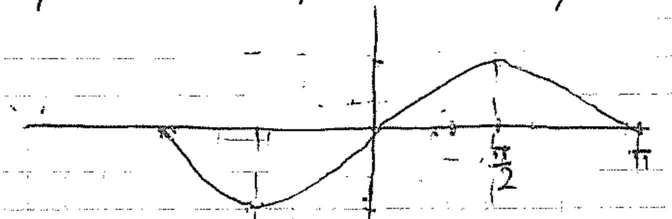
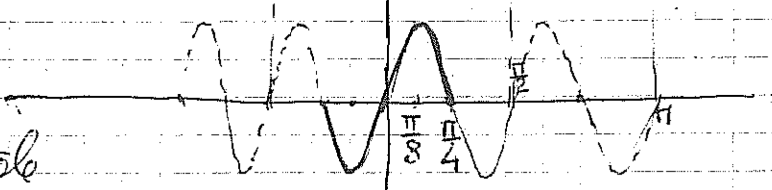
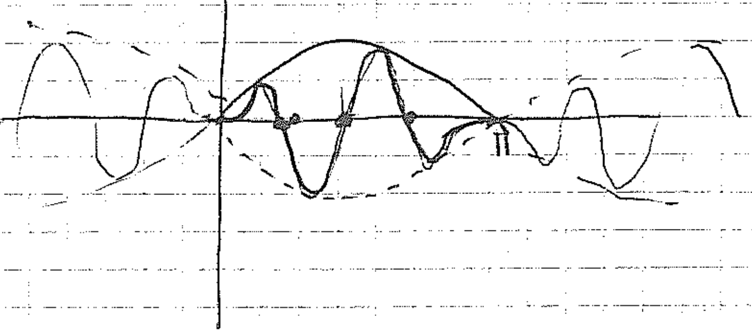


grafico $y = \sin 4x$
"compressione" orizzontale per un fattore $\frac{1}{4}$ del grafico di $y = \sin x$



poiché $|\sin 4x| \leq 1$
$|\sin 4x \sin x| \leq |\sin x|$
quindi il grafico con maggior frequenza oscilla tra quello di $y = \sin x$ e $y = -\sin x$
inoltre nei punti $0, \pi$
le derivate
$\cos x \sin 4x + (\sin x) 4 \cos 4x$
è nulla



7. $\begin{cases} X''(t) - 2X(t) = 2 \\ X(0) = 1, \; X'(0) = 1 \end{cases}$

- Soluzioni omogenea $y'' - 2y = 0 \quad \lambda^2 - 2 = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$
$y(t) = ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t}$
- Soluzione particolare $z(t) = -1$

- Soluzione generale $ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t} - 1 = X(0)$
- $X(0) = a + b - 1 = 1 \qquad X'(0) = a\sqrt{2} - b\sqrt{2} - 1 = 1$
$a + b = 2 \qquad a - b = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff a = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \; b = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(1+y)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy =$

$1 \leq y = e^x \leq +\infty$
$dy = e^x dx$
$\frac{dy}{y} = dx$

$\displaystyle = \lim_{c \to \infty} \left(\int_1^c \frac{dy}{y} - \int_1^c \frac{dy}{1+y} \right) = \lim_{c \to \infty} \left(\lg c - \lg 1 - \lg(1+c) + \lg 2 \right) =$

$\displaystyle = \lim_{c \to \infty} \left(\lg 2c - \lg(1+c) \right) = \lim_{c \to \infty} \lg \frac{2c}{1+c} = \lg \lim_{c \to +\infty} \frac{2c}{1+c} = \lg 2$

9 $P(X=2^n) = \frac{2}{3^{n+1}}$ $\quad P(X \neq 1, 2, 4, 8, \dots) = 0$

a_ Affinché quelle date sia una distribuzione di probabilità deve essere:

$$1 = \mathbb{P}(X = 1, 2, 4, 8, \dots) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{3}{2} = 1.$$

b_ $\langle X \rangle$ poiché X assume solo i valori lungo una successione il valor medio di X è ben definito nel caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n \mathbb{P}(X=x_n)| < +\infty$$

e vale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}(X=x_n)$

Nel caso $x_n = 2^n > 0$ e quindi

$$\langle X \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 2^n \mathbb{P}(X=2^n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{2}{3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \sum^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{3-2}{3}} = \frac{2}{3} \frac{3}{1} = 2$$