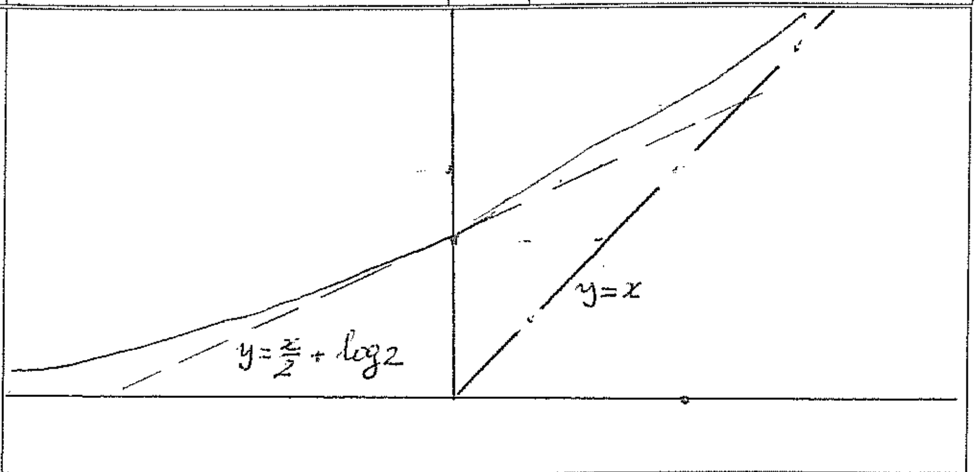
Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità
Jmmy A. Mauro, Vincenzo M. Tortorelli
X appello : 12 Aprile 2010

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCR.	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo*
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da ⊛;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1	$2 < x < \frac{5}{6}\pi$	2	$N_q \geqslant 105$
3	126	4	$2\sqrt{5}$
5			
6a	$1 + t + t^2 + \dots + t^n$	6b	$x + x^2 + x^3$

ESERCIZIO n. 1 Risolvere $\sin x > \frac{1}{2}$, $2 < x < 3$.

ESERCIZIO n. 2 Sono presenti 14 varianti fenotipiche dipendenti esclusivamente da un certo gene. Quanti almeno devono essere i genotipi in ipotesi di dominanza nelle coppie alleliche?

ESERCIZIO n. 3 Quanti sono i cammini, sui lati delle caselle quadrate di una scacchiera 5X4, di lunghezza minima che congiungono due vertici opposti? (si pensi un cammino come una sequenza di istruzioni: A=in alto, B=in basso, D=a destra, S =a sinistra, e si individui quali "parole" scritte con queste lettere indicano i cammini di lunghezza minima ...)

ESERCIZIO n. 4 Si calcoli l'area del triangolo con vertici $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(4,3,2)$.

ESERCIZIO n.5 Si tracci approssimativamente il grafico di $\log(1+e^x)$.

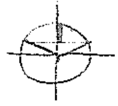
ESERCIZIO n. 6 a- Si scriva il polinomio di Taylor centrato in $t=0$ di $G(t) = \dfrac{1}{1-t}$.
b- Si calcoli il polinomio di Taylor centrato in $x=0$ di grado 3 di $f(x) = \frac{x}{1-\sin x}$.

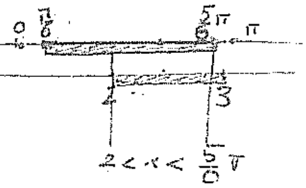
• ESERCIZIO n. 7 Trovare la soluzione di: $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$

• ESERCIZIO n.8
a- Si approssimi con una frazione il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,\sin\sqrt{t}\,dt$ a meno di $\frac{1}{100}$. (Si usi lo sviluppo di Taylor in modo opportuno.)
b- Si calcoli la primitiva di $\sqrt{t}\sin\sqrt{t}$.

• ESERCIZIO n. 9 Nell'arco di un anno accademico il 30% degli studenti ha seguito il corso e *se provano l'esame in un appello* hanno probabiltà del 90% di essere promossi in quell'occasione. Gli studenti che non hanno seguito il corso vedono diminuita questa possibilità al 30%.
a- Con che probabilità un qualsiasi studente supera l'esame in un appello in cui si presenta?
b- Qual'è il numero medio di appelli a cui si deve presentare uno studente che ha seguito il corso per superare l'esame?
c- Qual'è il numero medio di appelli a cui si deve presentare uno studente che non ha seguito il corso per superare l'esame?

---

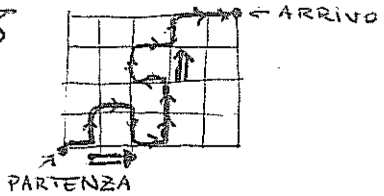
1 $\begin{cases}\sin x > \frac{1}{2} \\ 2<x<3\end{cases}$  $\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi \\ 2<x<3\end{cases}$ $0<\frac{\pi}{6}<2<\frac{5}{6}\pi<3<\pi$



2 N numero alleli = numero omozigoti $\geq$ numero fenotipi = 14

numero dizigoti $\frac{N^2-N}{2}$ 

numero genotipi $= N+\frac{N^2-N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \geq \frac{14\cdot 15}{2} = 105$

3 

I cammini di lunghezza minima, con i punti di partenza e arrivo indicati, possono solo essere specificati dalle istruzioni ALTO, SINISTRA

(il cammino evidenziato SASBSAADASASS è più lungo di quello ottenuto sostituendo le frecce doppie:
S S SAA A ASS)

Necessariamente ci si deve muovere di cinque a sinistra e quattro in alto

Quindi i cammini di lunghezza minima devono avere 4 A e 5 S: sono tanti quanti gli anagrammi di AAAASSSSS

$$\frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2} = 9\cdot 7\cdot 2 = 9\cdot 14 = 140-14 = 126$$

4 Area triangolo vertici (111)(234)(432) = Area triangolo vertici (000)(123)(321)

$= \frac{1}{2}$ prodotto lunghezze lati $\cdot$ |sin angolo compreso| =

$= \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9}\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{1-(\text{coseno angolo compreso})^2} =$

$= \frac{14}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(1,2,3)\circ(3,2,1)}{14}\right)^2} = 7\sqrt{1-\left(\frac{3+4+3}{14}\right)^2} =$

$= \frac{7}{14}\sqrt{(14)^2-100} = \frac{7}{14}\sqrt{96} = \sqrt{24} = 2\sqrt{5}$

oppure

Area triangolo vertici (000)(123)(321) =

$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\det\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}\right)^2+\left(\det\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\right)^2+\left(\det\begin{pmatrix}2&2\\3&1\end{pmatrix}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \frac{1}{2}\sqrt{96} = 2\sqrt{5}$

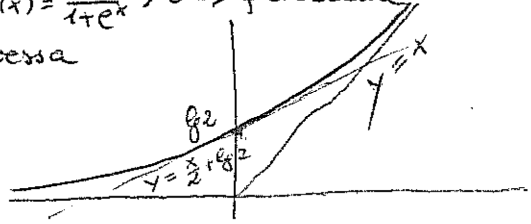
$\begin{matrix}1&3\\2&2\\3&1\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&3\\2&2\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&3\\3&1\end{matrix}$ $\begin{matrix}2&2\\3&1\end{matrix}$

5. $f(x)\geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -0$ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0 \Rightarrow f$ crescente

$f'(x) = 1-\frac{1}{1+e^x}$ crescente $\Rightarrow f$ convessa

$f(x) = \lg(1+e^x) > \lg(e^x) = x$

$f(x)-x = \lg\left(\frac{1}{e^x}+1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$



6

a $G(t) = \frac{1}{1-t}$ (pro $|t|<1$) $= \lim_{n\to\infty} 1+t+\dots+t^n = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

$G(t) = 1+t+\dots+t^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k = 1+\dots+t^n + t^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} t^k =$

$= 1+t+\dots+t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t} = 1+\dots+t^n + O(t^{n+1})$

$1+\dots+t^n$

b $f(x) = x(1-\sin x)^{-1} = x\left(\frac{1}{1-\sin x}\right) = [\sin x = t]$

$= x(1+\sin x + \sin^2 x + O(\sin^3 x)) = [\sin x = x + O(x^3)]$

$= x(1 + x + O(x^3) + x^2 + O(x^4) + O(x^3)) =$

$= x(1+x+x^2+O(x^3)) =$

$= x + x^2 + x^3 + O(x^4)$.

$x + x^2 + x^3$

7 $\begin{cases} x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = e^{3t} \\ x(0)=1 \\ x'(0)=1 \end{cases}$

• soluzioni omogenee $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$

RADICI POLINOMIO CARATTERISTICO $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad \lambda \in \frac{6+\sqrt{36-36}}{2} = 3$

$$y(t) = a e^{3t} + b\, t e^{3t} = (a+bt)e^{3t}.$$

• soluzione particolare omogenea

essendo il termine noto del tipo $e^{t \cdot \text{ radice pol. caratt.}}$

si cerca una soluzione particolare del tipo

$(\alpha + \beta t + \gamma t^2)e^{3t}$, cioè, essendo $(\alpha+\beta t)e^{3t}$

soluzioni dell'omogenea, basta trovare una

soluzione particolare del tipo

$z(t) = \gamma t^2 e^{3t}$.

Si impone che sia soluzione, $z'(t) = 2\gamma t e^{3t} + 3\gamma t^2 e^{3t}$

$z''(t) = 2\gamma e^{3t} + 6\gamma t e^{3t} + 6\gamma t e^{3t} + 9\gamma t^2 e^{3t}$

$$\underbrace{\cancel{9\gamma t^2 e^{3t}} + \cancel{12\gamma t e^{3t}} + 2\gamma e^{3t}}_{z''} \underbrace{- \cancel{12\gamma t e^{3t}} - \cancel{18\gamma t^2 e^{3t}}}_{-6z'} + \underbrace{\cancel{9\gamma t^2 e^{3t}}}_{9z} = e^{3t}$$

rimane la condizione $2\gamma e^{3t} = e^{3t}$ cioè $\gamma = \frac{1}{2}$

• Le soluzioni dell'equazione sono quindi $\left(a + bt + \frac{t^2}{2}\right)e^{3t} = x(t)$

$x'(t) = (b+t)e^{3t} + 3\left(a + bt + \frac{t^2}{2}\right)e^{3t}$

imponendo le condizioni $x(0) = a = 1$

e $\quad x'(0) = b + 3a = 1$

si ottiene $a = 1$ e $b = -2$.

La soluzione è quindi $\left(1 - 2t + \frac{t^2}{2}\right)e^{3t}$

8

a: $\int_0^1 \sqrt{t}\sin\sqrt{t}\,dt = \frac{m}{n} \pm \frac{1}{100}$ $\qquad 3! = 6 \quad 5! = 6\cdot 4\cdot 5 = 120$

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!}\cos\theta = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{6} \pm \frac{1}{120} \quad (0\le t, \cos\theta \le 1)$$

$$\sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{6} - \frac{1}{120} \le \sin\sqrt{t} \le \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{6} + \frac{1}{120}$$

$$t - \frac{t^2}{6} - \frac{1}{120} \le t - \frac{t^2}{6} - \frac{\sqrt{t}}{120} \le \sqrt{t}\sin\sqrt{t} \le t - \frac{t^2}{6} + \frac{\sqrt{t}}{120} \le t - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{120} \quad (0\le t\le 1)$$

$$\int_0^1 \left(t - \frac{t^2}{6} - \frac{1}{120}\right)dt \le \int_0^1 \sqrt{t}\sin\sqrt{t}\,dt \le \int_0^1 \left(t - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{120}\right)dt$$

$$\int_0^1 t\,dt - \int_0^1 \frac{t^2}{6}dt - \int_0^1 \frac{1}{120}dt \qquad\qquad \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 \frac{t^2}{6}dt + \int_0^1 \frac{1}{120}dt$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{18} - \frac{1}{120} \qquad\qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{120} \le \int_0^1 \sqrt{t}\sin\sqrt{t}\,dt \le \frac{4}{9} + \frac{1}{120}$$

b $\quad \sqrt{t} = x \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{dt} \qquad \sqrt{t}\sin\sqrt{t} = 2x^2\sin x\,\frac{dx}{dt}$

$\sqrt{t}\sqrt{t}\sin\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$

una primitiva di $\sqrt{t}\sin\sqrt{t}$ è una primitiva di $2x^2\sin x$ calcolata in $x=\sqrt{t}$

$$\int 2x^2\sin x\,dx = 2\int \underset{f}{x^2}\,\underset{g'}{\sin x}\,dx = 2\Big(\underset{f}{x^2}\underset{g}{(-\cos x)} - \int \underset{f'}{2x}\,\underset{g}{(-\cos x)}\,dx\Big) =$$

$$= 2\Big(-x^2\cos x + 2\int \underset{\varphi}{x}\,\underset{\psi'}{\cos x}\,dx\Big) = 2\Big(-x^2\cos x + 2\big(\underset{\varphi}{x}\,\underset{\psi}{\sin x} - \int \underset{\varphi'}{1}\cdot\underset{\psi}{\sin x}\big)\Big) =$$

$$= 2\big(-x^2\cos x + 2(x\sin x - (-\cos x))\big) + C =$$

$$= 2(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x) + C = 4x\sin x + 4\cos x - 2x^2\cos x + C$$

[verifica $(4x\sin x + 4\cos x - 2x^2\cos x)' = \cancel{4\sin x} + \cancel{4x\cos x} - \cancel{4\sin x} - \cancel{4x\cos x} + 2x^2\sin x$]

La primitiva è quindi $4\sqrt{t}\sin\sqrt{t} + 4\cos\sqrt{t} - 2t\cos\sqrt{t} + c$.

9) $P = \begin{cases} 1 & \text{PROMOSSO} \\ 0 & \text{NON PROMOSSO} \end{cases}$ $\quad S = \begin{cases} 1 & \text{CORSO SEGUITO} \\ 0 & \text{CORSO NON SEGUITO} \end{cases}$

a) $\mathbb{P}(P=1/S=1) = 90\%$ $\quad \mathbb{P}(P=1/S=0) = 30\%$

$$\mathbb{P}(P=1) = \mathbb{P}(P=1/S=1)\,\mathbb{P}(S=1) + \mathbb{P}(P=1/S=0)\,\mathbb{P}(S=0)$$

$$= 90\%\ 30\% + 30\%\ 70\% = 48\% = \frac{12}{25}$$

b) N sia la variabile aleatoria che conta il numero di tentativi che uno studente a caso fa per passare.

$P_1, P_2, \dots$ siano le variabili a valori 0, 1 dei vari tentativi d'esame e siano indipendenti

$$\mathbb{P}(N=k/S=1) = \mathbb{P}(P_1=0 \text{ e } P_2=0 \text{ e } \dots \text{ e } P_{k-1}=0 \text{ e } P_k=1/S=1) =$$

$$= \mathbb{P}(P_1=0/S=1)\cdot\mathbb{P}(P_2=0/S=1)\cdots\mathbb{P}(P_{k-1}=0/S=1)\cdot\mathbb{P}(P_k=1/S=1)$$

$$= \left(1-\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{9}{10}$$

$\langle N \rangle$ per studente che ha seguito =

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(N=k/S=1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{9}{10}\,\frac{1}{10^{k-1}} =$$

$$= \frac{9}{10}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$$

ora $\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1}$ è la derivata di $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, quindi è $\frac{1}{(1-x)^2}$ per cui

$$\langle N/S=1\rangle = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{10}{9}$$

c) del tutto analogo solo che si usano le probabilità $\mathbb{P}(P=0/S=0) = 1-\frac{3}{10}$ $\quad \mathbb{P}(P=1/S=0) = \frac{3}{10}$

ottenendo $\langle N/S=0\rangle = \frac{10}{3} \geq 3$