soluzioni B

1 . 2 . 3 . 4 . 5 Analoghi ai corrispondenti della sezione A.

6 . × La funzione $g(x) \equiv 2$ è soluzione dell'equazione

× Nessun altra soluzione ha grafico che interseca il grafico di questa soluzione che è la retta orizzontale $y=2$

Quindi la soluzione che soddisfa anche la condizione iniziale $y(0)=3$ deve avere grafico che sta sempre nella zona $y>2$

× Ma in tale zona $y(2-y)<0$, quindi $y'(x)<0$ cioè $y(x)$ è decrescente.

× Poiché per tale soluzione $y'(x) = 2y(x) - y^2(x) \geq -y^2(x) \Rightarrow$

$\frac{y'(x)}{y^2(x)} \geq -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{9} \geq -x \Leftrightarrow y(x) \geq \frac{1}{x+\frac{1}{9}}$

$y(x)$ ha un asintoto verticale per $x<0$, ed è definita solo per valori maggiori di tale barriera

× Per $x \to +\infty$ invece $y(x) \longrightarrow l_1 \geq 2$ e quindi

$y'(x) = y(x)(2-y(x)) \longrightarrow l_1(2-l_1)$ $x \to +\infty$

se tale numero non fosse nullo $y(x)$ attraverserebbe la barriera $y=2$. quindi $l_1 = 2$.

7 Analogo al corrispondente della sezione A.

8 " " " "

9 ved. risultato 10. prodotto scalare = somma prodotti coordinate di stesso posto = PRODOTTO LUNGHEZZE PER COSENO

11 " "

12.B. Sia N il numero di elementi del campione, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 quelli di ciascuna classe $N = N_1+N_2+N_3+N_4+N_5$; $\frac{N_1}{N} = \frac{21}{100}$, $\frac{N_2}{N} = \frac{39}{100}$, $\frac{N_3}{N} = \frac{8}{100}$, $\frac{N_4}{N} = \frac{31}{100}$, $\frac{N_5}{N} = \frac{1}{100}$
(N sarà multiplo di 100).

- Ordinando i dati campionari in modo crescente per le ipotesi si ha:

$$\underbrace{x_1 \le \dots \le x_{N_1}}_{\text{I CLASSE}} < \underbrace{x_{N_1+1} \le \dots \le x_{N_1+N_2}}_{\text{II CL}} < \underbrace{x_{N_1+N_2+1} \le \dots \le x_{N_1+N_2+N_3}}_{\text{III CL}} < \underbrace{x_{N_1+N_2+N_3+1} \le \dots \le x_{N_1+\dots+N_4}}_{\text{IV CL}} < \underbrace{x_{N_1+\dots+N_4+1} \le \dots \le x_N}_{\text{V CL}}$$

$M_1 = 59$	$M_2 = 75$	$M_3 = 123$	$M_4 = 131$	$M_5 = 171$
21%	39%	8%	31%	1%

- LA MEDIA $M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{I\,cl} x_i + \frac{1}{N}\sum_{II\,cl} x_i + \frac{1}{N}\sum_{III\,cl} x_i + \frac{1}{N}\sum_{IV\,cl} x_i + \frac{1}{N}\sum_{V\,cl} x_i =$

$= \frac{N_1}{N} M_1 + \frac{N_2}{N} M_2 + \frac{N_3}{N} M_3 + \frac{N_4}{N} M_4 + \frac{N_5}{N} M_5 = \frac{21}{100}59 + \frac{39}{100}75 + \frac{8}{100}123 + \frac{31}{100}131 + \frac{1}{100}171 =$

$= \dots = \frac{9380}{100} = 93{,}8$

- LE ALTRE QUANTITÀ SONO INDETERMINATE
- LA MEDIANA $\frac{1}{2}\left(x_{N\frac{50}{100}} + x_{N\frac{50}{100}+1}\right)$ È COMPRESA TRA VALORI DELLA SECONDA CLASSE E QUINDI TRA LA MEDIA DELLA CLASSE PRECEDENTE E QUELLA DELLA CLASSE SEGUENTE; 59 e 123.

(Per dire qualche cosa di più: poichè $N_1+N_2 = \frac{60}{100}N$ ponendo $x_{N\frac{21}{100}+1} = x_{N_1+1} = \dots = x_{N(\frac{50}{100}+z)} = 59+\varepsilon$ e $x_{N(\frac{50}{100}+z)+1} = \dots = x_{N\frac{60}{100}} = 123-\delta$ si otterrebbe per $\begin{smallmatrix} z \ge 1 \\ z < 10\end{smallmatrix}$ una mediana sempre più vicina a 59. Ciò è possibile poichè $(59+\varepsilon)\frac{N}{100}(29+z)+(123-\delta)\frac{N}{100}(10-z) = \frac{75\cdot 39}{100}N$ ha soluzione z tra 0 e 10, e quindi le distribuzioni assegnate non cambia le medie di classe.
Se poi si considera il caso limite $x_{N_1} = \dots = x_{N\frac{50}{100}-1} = 59$ e i rimanenti eguali a $123-R$, poichè $59(N\frac{21}{100}-1)+(123-R)(N\frac{10}{100}+1) = \frac{75\cdot 39}{100}N$ ha soluzione $R = 16\frac{N+400}{N+100} < 123$ (essendo $N > 100$) se ne deduce che la mediana dev'essere minore di $123 - 16\frac{N+400}{N+100}$).

- ESAMINIAMO ORA IL VALORE MINIMO x_1 E QUELLO MASSIMO x_N.

$\frac{N}{100}171 = x_N + (x_{N-1} + \dots + x_{N_1+N_2+N_3+N_4+1}) > x_N + \left(\frac{N}{100}-1\right)131$ quindi $N\frac{171-131}{100} + 131 > x_N$

$59\,N\frac{21}{100} = x_1 + (x_2 + \dots + x_{N_1}) < x_1 + \left(N\frac{21}{100}-1\right)75$ quindi $x_1 > N\frac{21}{100}(59-75) + 75 = -N\frac{21}{100}.16 + 75$

- PER LA VARIANZA LA VALUTAZIONE DAL BASSO È:

$VAR = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - M^2 = \frac{N_1}{N}\sum_{I} x_i^2 + \dots + \frac{N_5}{N}\sum_{V} x_i^2 - M^2 \ge \frac{N_1}{N}M_1^2 + \dots + \frac{N_5}{N}M_5^2 - M^2$. Valutazione dall'alto $VAR \le \frac{x_N^2}{N} - M^2 \le \left(N\frac{40}{100} + 131\right)^2 - M^2$. D'altronde avvicinando a 131 gli elementi della V classe tranne x_N questo va a superare $N\cdot\frac{40}{100}$; per tale distrib. $Var \ge \frac{x_N^2}{N} - M^2 \ge N\frac{4}{25} - M^2$

- La moda è completamente indeterminata infatti una qualsiasi distribuzione iniettiva compatibile con i dati (per cui tutti i valori o nessun valore è di moda) può essere modificata mantenendo le medie di classe in modo che un solo valore abbia frequenza 2.

13.B . LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $y''(x) - \lambda y(x) = \cos x$ SONO DEL TIPO

$$a w_1^\lambda(x) + b w_2^\lambda(x) + y_\lambda^*(x) \quad ; \quad a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}$$

OVE $w_1^\lambda(x)$, $w_2^\lambda(x)$ SONO DUE SOLUZIONI CHE NON SIANO UNA "MULTIPLO" DELL'ALTRA DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $z''(x) - \lambda z(x) = 0$

E $y_\lambda^*(x)$ È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE DATA

°° SI TRATTA DI TROVARE I NUMERI $\lambda \in \mathbb{R}$ PER CUI

PER OGNI $a, b \in \mathbb{R}$ ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ $\quad -M \le a w_1^\lambda(x) + b w_2^\lambda(x) + y_\lambda^*(x) \le M$

°°° + SOLUZIONI OMOGENEA : $z''(x) - \lambda z(x) = 0$

polinomio associato $w^2 - \lambda$ radici $w^2 = \lambda$

$\lambda = 0$ le soluzioni dell'omogenea sono $a + bx$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $\quad w_1^0 = 1, w_2^0 = x$

$\lambda > 0$ " " $a e^{\sqrt{\lambda} x} + b e^{-\sqrt{\lambda} x}$ " $\begin{cases} w_1^\lambda = e^{\sqrt{\lambda} x} \\ w_2^\lambda = e^{-\sqrt{\lambda} x} \end{cases}$

$\lambda < 0$ " " $a \cos(\sqrt{|\lambda|} x) + b \sin(\sqrt{|\lambda|} x)$ " $\begin{cases} w_1^\lambda = \cos\sqrt{|\lambda|} x \\ w_2^\lambda = \sin\sqrt{|\lambda|} x \end{cases}$

\+ Per trovare una soluzione particolare conviene usare il metodo dei coeff. indeterminati

Nel caso $\lambda \ge 0$ la soluzione particolare sarà del tipo $A \cos x + B \sin x$. Quindi le soluzioni non saranno limitate

Nel caso $\lambda < 0$

se $\lambda \ne -1$ ancora la soluzione particolare sarà del tipo $A \cos x + B \sin x$. Quindi le soluzioni saranno limitate

$$\left| a \cos\sqrt{|\lambda|} x + b \sin\sqrt{|\lambda|} x + A \cos x + B \sin x \right| \le |a| + |b| + |A| + |B|$$

Se $\lambda = -1$ invece la soluzione particolare è del tipo $x(A \cos x + B \sin x)$. Quindi le soluzioni non saranno limitate.

QUINDI I λ PER CUI TUTTE LE SOLUZIONI SONO LIMITATE SONO I $\lambda < 0$ E DIVERSI DA -1