I Parte.

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{|x+1|-2}$.
2. Dire quali tra le seguenti funzioni sono derivabile su tutto $\mathbb{R}$: $e^{|x|}$, $|e^x|$, e^{x^2}.
3. Dire per quali x la serie $\sum_0^{+\infty}(-1)^n|x|^{n/2}$ converge, e calcolarne la somma.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.
5. Dare un esempio di funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua, con limite $+\infty$ a $+\infty$, ma che non sia definitivamente crescente.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{+\infty} n^n(3+\sin n)\,x^n$.
7. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $e^z=-1$.
8. Enunciare il teorema di Rolle.

II Parte.

1. Studiare, al variare di $a\in\mathbb{R}$, la convergenza di $\int_1^\infty \left[e^{-1/x}-\cos(a/\sqrt{x})\right]dx$.
2. Si consideri la serie di potenze $\sum_2^\infty \dfrac{x^n}{n(n-1)}$.
   a) Determinarne il raggio di convergenza;
   b) discutere il comportamento della serie al variare di $x\in\mathbb{R}$;
   c) calcolare esplicitamente il valore.
3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:
   a) dati due zeri distinti (cioè punti in cui f si annulla), esiste un punto di massimo o minimo relativo tra essi strettamente compreso;
   b) se f è derivabile due volte con f'' strettamente positiva, allora f ha al più due zeri;
   c) se f è derivabile n volte con D^nf strettamente positiva, allora f ha al più n zeri.
4. Dei seguenti insiemi di funzioni, dire quali hanno cardinalità numerabile, quali del continuo (cioè di $\mathbb{R}$), quali ancora maggiore:
   a) funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$;
   b) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;
   c) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue;
   d) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive.

I Parte.

1. $|x+1|-2\geq 0$, ovvero $x\geq 1$ e $x\leq -3$.
2. La seconda e la terza.
3. La serie si scrive come $\sum_0^\infty \big(-\sqrt{|x|}\big)^n$, e converge per $-1<x<1$ a $\dfrac{1}{1+\sqrt{|x|}}$.
4. $\log(1+\sin x)$.
5. Ad esempio $x+2\sin x$.
6. Il raggio di convergenza è 0.
7. Posto $z=x+iy$, deve essere $e^x e^{iy}=e^{\pi i}$, ovvero $x=0$ e $y=\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

II Parte.

1. La funzione $f(x):=e^{-1/x}-\cos(a/\sqrt{x})$ è continua su $[0,+\infty)$ e per $x\to+\infty$ la parte principlae è data da
$$f(x)=\Big[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]-\Big[1-\frac{a^2}{2x}+\frac{a^4}{24x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$
$$=\frac{a^2-2}{2x}+\frac{12-a^4}{24x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\sim\begin{cases}\dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a\neq\pm\sqrt{2},\\[2mm] \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a=\pm\sqrt{2}.\end{cases}$$
Dunque f ha segno definitivamente costante, ed applicando il teorema di confronto asintotico otteniamo che l'integrale di f è finito se e solo se $a=\pm\sqrt{2}$.

2. a) Il raggio di convergenza è 1.
b) Quindi la serie converge assolutamente per $-1<x<1$, e non converge per $x>1$ (allorché diverge a $+\infty$) e per $x<-1$. Per $x=\pm1$ la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum 1/n^2$.
c) Sia $f(x)$ corrispondente alla smmma della serie. La derivata seconda di f è allora data da
$$f''(x)=D^2\Big[\sum_2^\infty\frac{x^n}{n(n-1)}\Big]=\sum_2^\infty x^{n-2}=\sum_0^\infty x^n=\frac{1}{1-x}\quad\text{per } -1<x<1.$$
Dunque, essendo $f(0)=0$ ed $f'(0)=0$, si ha
$$f(x)=\sum_2^\infty\frac{x^n}{n(n-1)}=(1-x)\log(1-x)+x\quad\text{per } -1<x<1.$$
Infine, si può osservare che l'uguaglianza vale anche per $x=\pm1$. In fatti, per $x=1$ abbiamo la serie telescopica
$$f(1)=\sum_2^\infty\frac{1}{n(n-1)}=\sum_2^\infty\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots=1$$
mentre per $x=-1$ abbiamo
$$f(-1)=\sum_2^\infty\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=\sum_2^\infty\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-1+2\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-1+2\log 2\,.$$

3. a) Siano $x_0<x_1$ i punti in cui f si annulla. Abbiamo allora due possibilità: almeno uno tra il punto di massimo ed il punto di minimo di f nell'intervallo $[x_0,x_1]$ è interno all'intervallo stesso, oppure f è costante sull'intervallo. In entrambe i casi abbiamo la tesi. (In effetti, questa è parte della dimostrazione del teorema di Rolle).
c) L'osservazione base è la seguente: se f è derivabile ovunque, tra due zeri distinti di f esiste sempre un punto in cui si annulla la derivata (teorema di Rolle, oppure punto precedente). Procediamo ora per induzione su n. Per $n=0$, l'enunciato è ovviamente vero. Supponiamolo vero per n e dimostriamolo per $n+1$. Per l'ipotesi indittiva, la funzione f' ammette al più n zeri, e siccome tra due zeri consecutivi di f deve essere compreso uno zero di f', ne deduciamo che f ha al più $n+1$ zeri.

4. a) Sia X_1 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{R}\sim 2^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$, abbiamo
$$X_1=\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\sim(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}\sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\sim 2^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\,.$$
b) D'altra parte, detto X_2 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$,
$$X_2\sim\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\succeq 2^{\mathbb{R}}\succ\mathbb{R}\,.$$
c) Sia X_3 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue. L'applicazione $\phi: X_3\to X_1$ che ad ogni $f\in X_3$ associa la sua restrizione ai razionali è iniettiva. Questo segue dal fatto che due funzioni *continue* che coincidono sui razionali devono coincidere ovunque. Ma allora $X_3\preceq X_1$, che ha la cardinalità del continuo. D'altra parte, X_3 contiene l'insieme delle funzioni costanti, che pure ha la cardinalità del continuo. Quindi
$$X_3\sim\mathbb{R}\,.$$
d) Sia X_3 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive. Pper ogni $A\subset\mathbb{R}$, definiamo la funzione $f_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ come segue:
$$f_a(x):=\begin{cases}e^x & \text{se } x\in A,\\ -e^x & \text{se } x\notin A.\end{cases}$$
Si verifica facilmente che f_A è bigettiva, ovvero appartiene a X_4. Inoltre, A coincide con l'insieme dei punti in cui f_A è positiva, e dunque l'applicazione ϕ che associa ad ogni $A\subset\mathbb{R}$ la funzione $f_A\in X_4$ è necessariamente iniettiva. Abbiamo quindi dimostrato che X_4 ha cardinalità maggiore o uguale a quella delle parti di $\mathbb{R}$, ovvero
$$X_4\succeq\mathbb{R}\,.$$
Volendo andare oltre, si osserva anche che X_4 è contenuta in X_2, e quindi $X_4\preceq X_2$, ed inoltre
$$X_2\sim\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\sim(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}=2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}\sim 2^{\mathbb{R}}$$
e dunque $X_2\sim X_4\sim 2^{\mathbb{R}}$.

Commenti.

- Esercizio 2, seconda parte: nessuno sembra essersi accorto del fatto che la derivata seconda di questa serie dava luogo ad una serie nota.
- Esercizio 3a): tutti (più o meno) hanno applicato il Teorema di Weierstrass all'intervallo determinato dai due zeri per trovare un punto di massimo ed uno di minimo. Non molto hanno chiarito però che questi punti sono anche di massimo e minimo relativo su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se sono interni all'intervallo (cosa che deve essere vera per almeno uno dei due, altrimenti …). La funzione $\sin x$ ha come zeri 0 e π, e compreso tra essi c'è solo il massimo locale $\pi/2$, mentre 0 e π, che sono i punti di minimo della restrizione della funzione all'intervallo $[0,\pi]$, non sono punti di minimo locale su $\mathbb{R}$.