

ESERCIZIO n. 1 Si trovi il rettangolo con lati paralleli agli assi cartesiani, interamente contenuto in  $\{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$  di area massima.

---

ESERCIZIO n. 2

a - Si provi  $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g$ .

b\* - Si determini una relazione di ricorrenza per i termini della successione numerica data dalle derivate successive calcolate in 0 della funzione  $x \mapsto \arcsin x$ .

---

ESERCIZIO n. 3 Sia  $f$  una funzione reale definita e continua in  $[x_0; x_0 + a[$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ . Se  $f$  è derivabile in  $]x_0; x_0 + a[$  e  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda$  allora  $\exists f'(x_0) = \lambda$ .

Si mostri con un esempio che non è vero il viceversa.

---

ESERCIZIO n. 4 Sia  $f$  derivabile in un intorno di  $x_0 \in \mathbf{R}$ .

a - Se  $\exists f''(x_0)$  allora  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$ .

b - Si mostri che se vi è tale limite non è detto che vi sia la derivata seconda nel punto  $x_0$ .

---

ESERCIZIO n. 5\* Si provi che le funzioni che sono derivate su tutto un intervallo hanno la proprietà del *valore intermedio*, ossia: se  $g(x) = f'(x)$ ,  $a < x < b$  allora per ogni  $\eta \in ]\inf g, \sup g[$  esiste  $\xi \in ]a, b[$  per cui  $\eta = g(\xi)$ .

---

ESERCIZIO n. 6 Sia  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . a - Si provi che  $f$  è continua su  $\mathbf{R}$ .

b - Si provi che le derivate di  $f$  in  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  sono del tipo funzione razionale moltiplicato  $f$ .

c - Si provi che  $f$  è derivabile infinite volte in  $x = 0$ .

---

ESERCIZIO n. 7

a\* - Sia  $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua, non costante, nulla agli estremi e derivabile in  $]a; b[$ . Allora

$$\exists \xi \in ]a; b[: |f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

b - Se  $g \in C^1([a; b])$ ,  $g'(0) = g'(1) = g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , e  $\exists g''(x)$ ,  $x \in ]0; 1[$  allora  $\exists \xi \in ]0; 1[ |g''(\xi)| > 4$ .