I Parte.

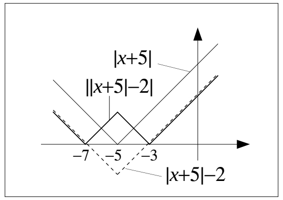
1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}}$.
2. Dire se la funzione $f(x) = \sin^2(x) + |\cos(x)|$ è periodica.
3. Determinare i numeri reali a per cui $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ è una funzione pari.
4. Determinare a e b in modo che la funzione $f(x) = e^{-x(ax+b)}$ abbia un punto di massimo o minimo in $x = -1/2$.
5. Determinare l'insieme degli $x \in [0, \pi]$ tali che $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$.
6. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$.
7. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = ||x + 5| - 2|$.
8. Scrivere un intervallo in cui sia possibile definire l'inversa della funzione $f(x) = 4x^2 - 4$, e calcolarla.

II Parte.

1. Determinare i valori del parametro reale a tali che
$$e^{|x|} - |x| + \cos(x) \geq a \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
2. Tracciare un grafico approssimativo della funzione
$$f(x) = (x-2)e^{\frac{x}{x-1}}.$$
3. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{x}{x + \log(x+1)} = \alpha x.$$

I PARTE.

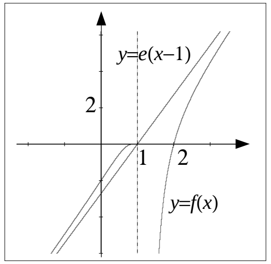
1. Il dominio è $(-5,1] \cup [2.+\infty)$.
2. Sì!
3. f è singolare solo per $x = a$, e quindi, per essere pari, deve necessariamente essere $a = 0$ (che è chiaramente sufficiente).
4. Siccome la funzione e^{-x} è strettamente decrescente, basta risolvere il problema per $f(x) = x(ax+b)$, per cui i punti di minimo o massimo assoluti coincidono con quelli per cui si annulla la derivata. Dunque deve essere $f'(-1/2) =$, ovvero $a = b \neq 0$.
5. $\dfrac{\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{12}$.
6. $f'(x) = 0$. Notare che infatti $f(x) = \pi/2$ per $x > 0$ e $f(x) = -\pi/2$ per $x < 0$.
7. Disegnando il grafico di f (a lato) si vede che $x = -7$ e $x = -3$ sono punti di minimo (assoluto) di f, mentre $x = -5$ è un punto di massimo locale.



8. Vanno bene sia la semiretta $(-\infty, 0]$ che la semiretta $[0,+\infty)$, dove $f^{-1}(y) = \sqrt{1+y^2/4}$ e $f^{-1}(y) = -\sqrt{1+y^2/4}$, rispettivamente.

II PARTE.

1. Siccome il termine di sinistra della disequazione è una funzione pari di x, possiamo limitarci agli x positivi. Ponendo $f(x) := e^x - x + \cos x$, vogliamo dunque calcolare il valore minimo di f. Osserviamo che $f''(x) = e^x - \cos x \geq 0$ per $x \geq 0$ (perché $e^x \geq 1$ e $\cos x \leq 1$), e quindi f è convessa. Inoltre $f'(0) = 0$, e quindi 0 è il punto di minimo assoluto di f (ristretta alla semiretta $x \geq 0$). Pertanto $\min f = f(0) = 2$, e la disequazione è verificata se e solo se $a \leq 2$.
2. La funzione f è definita (e derivabile) per $x \neq 1$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to 1^+$, e tende a 0 per $x \to 1^-$. Inoltre, facendo i conti (tanti) si ottiene



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^2-3x+3}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} \\
f''(x) &= -\frac{x}{(x-1)^4} e^{\frac{x}{x-1}} \ ,
\end{aligned}
$$

quindi la funzione è sempre strettamente crescente, convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Usando l'approssimazione $e^y \simeq 1+y+o(y)$ per $y \to 0$ si ottiene inoltre $f(x) = e(x-1)+o(1)$ per $x \to \pm\infty$, che dá gli asintoti di f. Osserviamo infine che $f'(x)$ tende a 0 per $x \to 1^-$. Questo permette di ottenere il disegno riportato in figura.

3. Si osservi innanzitutto che il termine di sinistra dell'equazione non è definito per $x = 0$, perché si annulla il denominatore, e quindi possiamo assumere che sia $x \neq 0$. In questo caso, per $\alpha = 0$, l'equazione non ha soluzioni. Per $\alpha \neq 0$, invece, l'equazione diventa $x + \log(x+1) = 1/\alpha$. Si vede ora che la funzione $f(x) := x + \log(x+1)$ è definita per $x > -1$, strettamente crescente, ed ha limite $+\infty$ in $+\infty$ e $-\infty$ in -1^+, e quindi c'è sempre una ed una sola soluzione.