Complementi di Analisi Matematica, Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica

V.M. Tortorelli

DIFFERENZIABILITÀ

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

TANGENZA A GRAFICI E CURVE: DIFFERENZIABILITÀ

DEFINIZIONE Una funzione reale di due variabili reali $(x, y) \mapsto f(x, y)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto alla prima variabile nel punto (p, q) se la funzione di una variabile $t \mapsto f(t, q)$ è derivabile in p. Analogamente rispetto alla seconda variabile considerando la derivabilità in q di $t \mapsto f(p, t)$

Per più di due variabili si estende la definizone come segue $(x_1 \dots x_k) \mapsto f(x_1, \dots x_k)$ si dice che ammette derivata parziale rispetto all' $i - esima$ variabile nel punto $p = (p_1 \dots p_k)$ se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p_1 \dots t_{i^o \ posto} \dots p_k)$ è derivabile in p_i

Nel caso per le derivate parziali si usano le notazioni $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $D_{x_i} f(p)$, $D_i f(p)$.

DEFINIZIONE Una funzione $f : A \subseteq B \to C$, ove B e C sono spazi normati, si dice che ammette derivata direzionale nella direzione $v \in B$, $v \neq 0$, in un punto p del suo dominio A se la funzione di una variabile $t \mapsto f(p + tv)$ è derivabile in $t = 0$.

In altre parole se la restrizione della funzione alla retta passante per p e di direzione v, intesa come composizione con la parametrizzazione lineare di tale retta $t \mapsto p+tv$, risulta derivabile. Altrimenti se il grafico di f intersecato il piano verticale per la retta di direzione v e passante per p è il grafico di una funzione derivabile di una variabile. Notazione $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, $D_v f(p)$.

OSSERVAZIONE Ammettere derivata parziale rispetto alla variabile $i - esima$ è quindi la stessa cosa che avere derivata direzionale nella direzione dell'$i - esimo$ asse coordinato:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$

OSSERVAZIONE: quindi per calcolare la derivata parziale di una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili rispetto alla seconda variabile nel punto $(1, 2, 3)$ si calcola la funzione in $(1, y, 3)$ e quindi si calcola la derivata di $y \mapsto f(1, y, 3)$ per $y = 2$.

OSSERVAZIONE Una funzione vettoriale a valori in $\mathbf{R}^k$ ammette derivate direzionali se e solo se ciò accade per le sue componenti.

Vale la pena provare la seguente proprietà

PROPOSIZIONE Sia A aperto connesso. Allora una funzione che abbia le derivate parziali nulle in ogni punto di A è costante su A.

DIM.: dati due punti di A li si può collegare con una spezzata con lati paralleli agli assi. Ma la funzione ristretta a questi lati ha derivata nulla per ipotesi quindi è costante su ognuno dei lati. In particolare ha lo stesso valore nei due arbitrari punti di A.

PROBLEMA: Una nozione elementare di tangenza di un iperpiano L ad un insieme C in un comune punto p è la seguente:

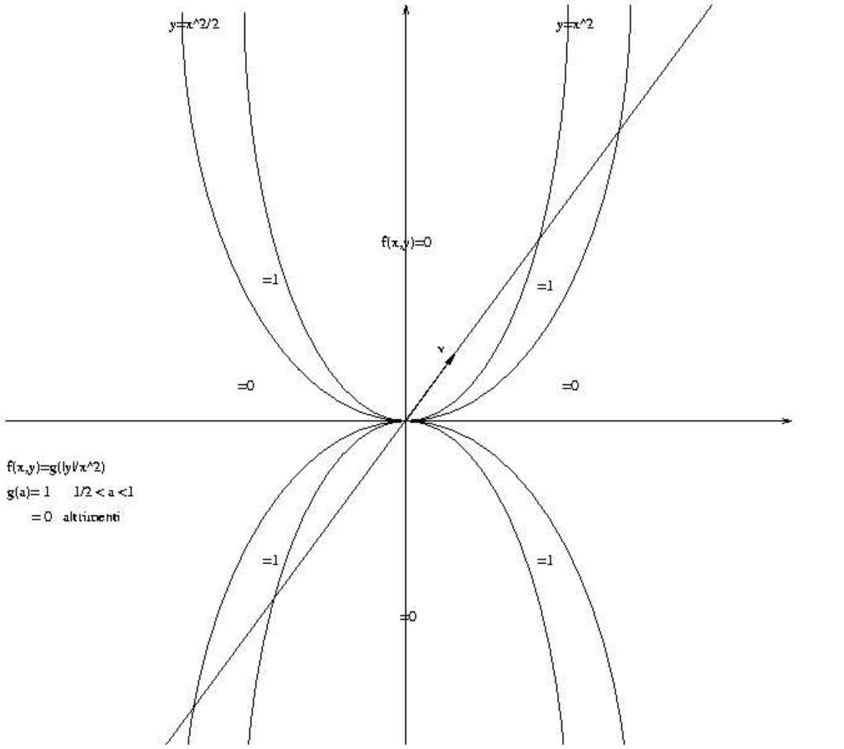
(A) detta $\pi_L(q)$ la proiezione ortogonale su L si deve avere $\lim_{q \to p,\ q \in C} \frac{dist(q, \pi(q))}{dist(p,q)} = 0$.

La nozione in uso in diverse teorie (dall'ottimizzazione alla teoria geometrica della misura), che comporta un'operazione di chiusura "mentre si ingrandisce vicino al punto", è la seguente e porta a considerare il concetto di *cono tangente*:

(B) $K - p = \{v : \exists \lambda_n \in \mathbf{R} \exists x_n \in C \ x_n \to p \ e \ \lambda_n(x_n - p) \to v \ n \to \infty\}$

Se vale (A) allora vale (B) e K contiene la parte di L approssimabile con punti di C.

Non è detto che per una funzione che in un punto p abbia tutte le derivate direzionali il grafico abbia un piano tangente in $(p, f(p))$. Anzi la funzione può risultare discontinua in tale punto:



Moltiplicando per x la funzione f si mostra che una funzione continua con tutte le derivate direzionali, ove l'associazione $v \mapsto D_v f$ pur risulta lineare, comunque può avere grafico senza piano tangente. Il concetto *sufficiente* per avere un grafico con piano tangente è quello di *approssimazione lineare* della funzione:

DEFINIZIONE Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$. p *interno* ad A.
La funzione f si dice *differenziabile* in p se vi è una funzione lineare $L_p : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ $((L_p(v))_i = \sum_{1 \le j \le k} a_{ij} v_j,\ 1 \le i \le m$, l'approssimante lineare) per cui

$$f(x) = f(p+v) = f(p) + L_p(x-p) + \varepsilon \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to p} \frac{|\varepsilon|}{|x-p|}$$

Nel caso si usa la notazione $L_p = df_p$: tale applicazione lineare si dice *differenziale* di f in p
Per esemplificare nel caso $k = 2$, $m = 1$, $p = (x_0, y_0)$ devono esistere due numeri a, b per cui

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

il differenziale di f in p è quindi l'applicazione lineare $(u, v) \mapsto au + bv = (a, b) \cdot (u, v)$
La nozione si estende nel caso di una funzione $f : A \subseteq B \to C$, ove B e C sono spazi normati e p è *interno* ad A. La funzione f si dice *differenziabile* in p se vi è una funzione *lineare e continua* $L_p : B \to C$ per cui

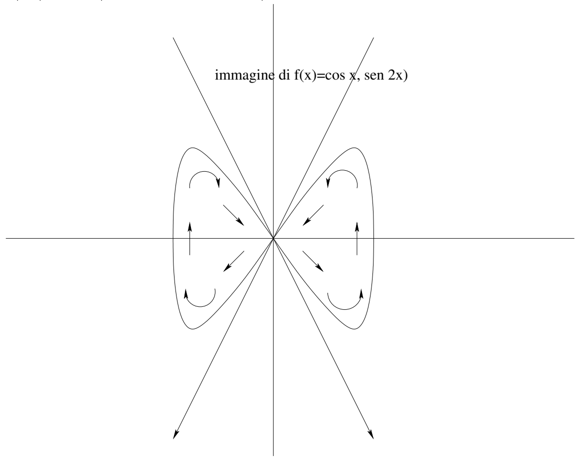
$$f(x) = f(p+v) = f(p) + L_p(x-p) + \varepsilon \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to p} \frac{|\varepsilon|_C}{|x-p|_B}$$

OSSERVAZIONE: immediatamente confrontando le definizioni nel caso $k = 1$ si ha che una funzione vettoriale di una variabile è differenziabile se e solo se è derivabile

Una funzione vettoriale di una variabile derivabile $x \mapsto f(x)$ se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora *l'immagine* di un intervallo sufficientemente *piccolo* attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $t \mapsto f(z) + tf'(z)$: poichè vi è differenziabilità $f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \varepsilon$ con $|\varepsilon|/|x-z| \to 0$ per $x \to z$. Quindi confrontando la distanza tra un punto dell'immagine dalla sua proiezione ortogonale sulla retta in questione:

$$\frac{\left|f(x)-\left(\left((f(x)-f(z))\cdot\frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right)\frac{f'(z)}{|f'(z)|}+f(z)\right)\right|}{|f(x)-f(z)|}=\frac{\left|\varepsilon-\left(\varepsilon\cdot\frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right)\frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right|}{|f'(z)(x-z)+\varepsilon|}\leq\frac{2|\varepsilon|}{|f'(z)(x-z)+\varepsilon|}$$

infinitesimo (analoga la prova che il grafico di una funzione differenziabile ha piano tangente)
- Se in un punto $f(y)$ "ci si ferma" ("velocità " nulla $f'(y)=0$) in effetti si può ripartire con inclinazione diversa: *e.g.* $f(x)=(x^3,|x|x^2)$, $x=y=0$, la cui immagine è il grafico del modulo che non ha una sola tangente in $(0,0)$.
- D'altronde un cammino può ripassare con diversa inclinazione per punti ove è "già " passato, per questo il vettore derivata nonnullo da la tangente solo all'immagine di un segmento abbastanza piccolo: *e.g.* $f(x)=(\cos x,\sin 2x)$



"passa" da $(0,0)$ sia per $x=y_1=\pi/2$ che per $x=y_2=3\pi/2$ ma con velocità sghembe.
- Per un cammino derivabile con derivata sempre nonnulla ed iniettivo vi è quindi tangente in ogni punto dell'immagine. Il grafico di una funzione di una variabile $x\mapsto g(x)$ derivabile può essere visto come immagne di un cammino vettoriale $x\mapsto f(x)=(x,g(x))$ che è sempre iniettivo e con vettore derivata $f'(x)=(1,g'(x))$ sempre nonnullo.
Quindi per il grafico di una funzione f di più variabili differenziabile in un punto p i cammini $t\mapsto(p+tv,f(p+tv))$ hanno immagini con tangente nel punto $(p,f(p))$ data dalla retta $s\mapsto(p+sv,f(p)+s\frac{\partial f}{\partial v}(p))=\frac{d(p+tv,f(p+tv))}{dt}(s)$.

OSSERVAZIONE: in dimesione finita se la funzione è differenziabile in un punto allora esistono tutte le derivate parziali: per l'oseravzione precedente e la definizione di differenziabilità con $x=p+te_i$
Si ottiene che $(df_pv)_i=\sum\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)v_j$. Ovvero la matrice associata all'applicazione lineare differenziale è qualla che ha come righe le derivate parziali delle funzioni componenti.
In generale se f è differenziabile in p allora ha le derivate direzionali in p e $\frac{\partial f}{\partial v}(p)=df_pv$
OSERVAZIONE: ovviamente se una funzione rispetto a date norme su B e C, lo è anche se si considerano norme equivalenti.
NOTAZIONE: nel caso $m=1$ se una funzione è differenziabile in p il vettore con componenti le derivate parziali si dice *gradiente* della funzione nel punto e si scrive $\nabla f(p)$. Le derivate direzionali sono quindi $v\cdot\nabla f(p)$
In generale la matrice con m righe e k colonne associata al differenziale di una funzione da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^m$, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq k}}$ si dice *matrice Jacobiana*, indicata anche con $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, in maniera suggestiva se si unifica con la notazione $y=f(x)$ si ottiene $\frac{\partial y}{\partial x}$.
OSSERVAZIONE Per una funzione differenziabile $\nabla f(p)$ se *non nullo* da la *direzione di massima crescita della funzione nel punto*: $\max_{|v|=1}\lim_{t\to0,t>0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t}=|\nabla f(p)|$

TEOREMA 1 Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ è differnziabile in p allora il grafico di f ha nel punto $(p, f(p))$ un piano k dimensionale tangente che è il grafico traslato nel punto $(p, f(p))$ della funzione lineare differenziale in p: cioè il grafico di $x \mapsto f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)(x_j - p_j)$.
Per esemplificare nel caso $k = 2$ ed $m = 1$, funzioni di due variabili a valori reali, il piano tangente al grafico in $(p, q, f(p, q))$ è il grafico della funzione lineare affine

$(x, y) \mapsto f(p, q) + \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)(x - p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)(y - q)$. Come luogo di zeri in $\mathbf{R}^3$ è

$\frac{\partial f}{\partial x}(p.q)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)y - z - \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)p - \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)q + f(p, q) = 0$

Un asserto utile nella teoria è il seguente:
LEMMA Se una funzione nei punti c di un segmento $S(p, q)$ di estremi p e q ha derivata nella direzione $v = p - q$ e allora

$|f(p) - f(q)|_C \leq \sup_{t\in[0;1]} |D_{p-q}f(t(q - p) + p)|_C$

Dato un funzionale ψ lineare e continuo su C, si tratta di applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $g(t) = \psi(f(p + t(q - p)))$ e considerare che $|v|_C = \sup_\psi \frac{|\psi(v)|}{|\psi|_{c'}}$, assumendo che in astratto vi sono funzionali continui non nulli in una dato punto.

Per il calcolo effettivo utilizzando le derivate parziali e la verifica che una funzione è differenziabile una condizione sufficiente, se pur non necessaria, è data dal seguente teorema.
TEOREMA 2 (Differenziale totale) Se f ha derivate direzionali in un intorno di un punto p, $v \mapsto D_v f(p)$ è lineare, ed f è continua in p allora è differenziabile nel punto p.
In dimensione finita: una funzione che ha tutte le derivate parziali in una palla di centro un punto p interno al suo dominio di definizione, continue nel punto p è differnziabile almeno nel punto stesso.
TEOREMA 3 Un funzione differenziabile in p è continua in p.
DEFINIZIONE Sia A aperto di uno spazio normato B. Sia f una funzione a valori in uno spazio normato C e differenziabile in ogni punto di A. La funzione che associa ad un punto di A il differenziale di f in quel punto si dice funzione differenziale o funzione tangente alla funzione f. Identificando lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $B = \mathbf{R}^k$ in $C = \mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{mk}$ la funzione differenziale è individuata dalla funzione da A in $\mathbf{R}^{mk}$ data da $x \in A \mapsto (D_1 f_1(x), \ldots D_k f_1(x), \ldots, D_1 f_m(x) \ldots D_k f_m(x))$

REGOLE PER LE FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Dalla derivabilità delle funzioni elementari di una variabile, dai seguenti asserti e dal teorema del differenziale totale si può riconoscere la differenziabiltà di molte funzioni
PROPOSIZIONE Le funzioni costanti sono differenziabili in ogni punto e il loro differnziale è la funzione lineare nulla.
PROPOSIZIONE Le funzioni lineari affini $x \mapsto= Ax + b =: f(x)$ con A lineare e continuo sono differenziabili in ogni punto p il loro differenziale è indipendente dal punto ed è la parte lineare della funzione stessa $v \mapsto Av$.
In dimensione finita con le coordinate si avrà

$(x_1 \ldots x_k) \mapsto (a_{11}x_1 + \ldots a_{1k}x_k + b_1, \ldots a_{m1}x_1 + \ldots a_{mk}x_k + b_m) = Ax + b =: f(x)$

$df_p(v) = (a_{11}v_1 + \ldots a_{1k}v_k, \ldots a_{m1}v_1 + \ldots a_{mk}v_k) = Av$.

In effetti si ha $f(x) = f(p) + A(x - p)$ con resto nullo, ovvero per funzioni a valori reali di due variabili affini $ax + by + c$ le derivate parziali sono rispettivamente le funzioni costanti a e b che sono ovviamente continue.
PROPOSIZIONE Il prodotto di due funzioni a valori reali differenziabili in p è differenziabile in p e vale la formula analoga a quella delle derivate: $d(f \cdot g)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p$
Questo si generalizza come segue: $\mathcal{B} : B \times D \to C$ bilineare e continua $|\mathcal{B}(u, v)|_C \leq c|u|_B|v|_D$, tra spazi normati, allora è differenziabile e

$d\mathcal{B}_{(u,v)}(h, k) = \mathcal{B}(u, k) + \mathcal{B}(h, v)$

TEOREMA 4 (Differenziale di una funzione composta, Regola della catena)
Siano $f : A \subseteq B \to O \subseteq C,\ g : O \to D$, $y = f(x)$
Se g è differenziabile in $y = f(p)$ ed f è differenziabile in $x = p$ allora la funzione composta $g \circ f$, $x \mapsto g(f(x)) =: g \circ f(x) : A \to \mathbf{R}^h$ è differenziabile in p.
Il suo differenziale è dato dall'iterazione dei differenziali: $dg \circ f_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v))$
In particolare $B = \mathbf{R}^k$, $C = \mathbf{R}^m$, $D = \mathbf{R}^h$ vale la seguente regola della catena per le derivate parziali:

$$\frac{\partial g(f(x))}{\partial x_i}(p) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(p)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

COROLLARIO Se f e df_p sono invertibili *con continuità* allora vi è $df^{-1}_{f(p)} = (df_p)^{-1}$, *i.e.* $\frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}$.
OSSERVAZIONE: ne segue che le funzioni differenziabili su un dato insieme a valori in uno spazio normato sono uno *spazio vettoriale*: per esempio $x \mapsto f(x) + g(x)$ si vede come composizione di $(u, v) \mapsto u + v$ (lineare) con $x \mapsto (f(x), g(x))$.
OSSERVAZIONE Considerando un luogo di zeri $C = \{x : f(x) - f(p) = 0\}$ di una funzione differenziabile f con differenziale non nullo in p si osserva *che per ogni direzione v tangente in p a C* è *ortogonale* al gradiente $\nabla f(p)$. Infatti se si considera una curva $\gamma : [-1; 1] \mapsto C$, $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = p$ si ha $t \mapsto f(\gamma(t)) = f(p)$ costante e quindi con derivata nulla per cui dalla regola della catena si ha $\nabla f(p) \cdot v = 0$.
Quindi se ci fosse piano tangente a C in p necessariamente sarebbe il piano di equazione
$f(p) + (x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \ldots + (x_n - p_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$