Complementi DI Analisi Matematica

Laurea Specialistica in Informatica, A.A. 2005-2006

V.M Tortorelli

Nozione formale	Base intuitiva	Principale applicazione
SPAZIO METRICO, DISTANZA	DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE	LUNGHEZZA DI CURVE
SPAZIO NORMATO	RIGA E COMPASSO distanza invariante per translazioni e coerente con dilatazioni.	LINEARIZZAZIONE
SPAZIO PREHILBERTIANO	CONFRONTO DI ANGOLI perpendicolarità (punti di minima distanza) come ortogonalità	VOLUMI E LUNGHEZZE
COMPLETEZZA	CONTINUO GEOMETRICO procedure di calcolo affidabili (successioni di Cauchy) convergono ad elementi ideali.	TEOREMI DI ESISTENZA
COMPATTEZZA (TOTALE LIMITATEZZA PIÚ COMPLETEZZA)	INSIEMI FINITI proprietà locali possono studiarsi riconducendosi al finito	TEOREMI DI ESISTENZA

	DEFINIZIONE
SPAZIO METRICO (INSIEME CON DISTANZA)	(M,d), $d{:}M\times M\to\mathbb{R}$ $d(x,y)\ \le\ d(x,z)+d(z,y)$ $d(x,y)\ =\ d(y,x)$ $d(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ x=y$
SPAZIO NORMATO (SPAZIO VETTORIALE CON NORMA)	(V,ν), V spazio vettoriale, $\nu{:}V\to\mathbb{R}$ $\nu(x+y)\ \le\ \nu(x)+\nu(y)$ $\nu(\lambda\cdot x)\ =\ \lvert\lambda\rvert\nu(x)$ $\nu(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$
SPAZIO PREHILBERTIANO (SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE)	$(V,\mathcal{B})$, V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ [$\mathbb{R}$], $\mathcal{B}{:}V\times V\to\mathbb{C}$ [$\mathbb{R}$], $u\mapsto\mathcal{B}(u,v_0)$ lineare $\mathcal{B}(u,v)=\overline{\mathcal{B}(v,u)}$ $\mathcal{B}(u,u)\ \ge\ 0$ $\mathcal{B}(u,u)=0\ \Leftrightarrow\ u=0$
SPAZIO COMPLETO successione di Cauchy $\Downarrow$ successione convergente	(M,d), spazio metrico $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon{:}\ \forall n,\ m\ \ge n_0\quad d(x_n,x_m)\ \le\ \varepsilon$ $\Downarrow$ $\exists x\in M\ :\quad d(x_n,x)\to0,\ n\to\infty$
SPAZIO TOTALMENTE LIMITATO ricopribile con un numero finito di palle di raggio arbitrariamente piccolo	(M,d), spazio metrico $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n=n_\varepsilon\ \exists\ x_1\ldots x_n\in M$ $\sup_{x\in M}\min_{1\le i\le n}\ \ d(x,x_i)\le\ \varepsilon$
SPAZIO COMPATTO (sequenzialmente) ogni successione ha una sottosuccessione convergente nello spazio	(M,d), spazio metrico $\forall\ \mathbf{x}{:}\mathbb{N}\to M$ $\exists\ \mathbf{k}{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ k_n\to+\infty,\ n\to+\infty$ $\exists\ y\in M\quad d(x_{k_n},y)\to0,\ n\to+\infty$

GLOSSARIO	DEFINIZIONE	NOTAZIONE
PALLE APERTE di centro x e raggio r	(M,d), spazio metrico, $x{\in}M$ $\{\ y{\in}M\ :\ \ d(x,y){<}r\ \}$	$B(x,r)$
PALLE CHIUSE di centro x e raggio r	(M,d), spazio metrico, $x{\in}M$ $\{\ y{\in}M\ :\ \ d(x,y){\leq}r\ \}$	$\bar{B}(x,r)$
INTORNO di un punto x	(M,d), spazio metrico, $x{\in}M$ $U{\in}M\ {:}\exists\ r{>}0\ \ \ B(x,r){\subseteq}U$	$U{\in}\mathcal{I}_x$
APERTO (sottoinsieme) intorno di ogni suo elemento	(M,d), spazio metrico, $A{\subseteq}M$ $\forall\ x{\in}A,\ \ A{\in}\mathcal{I}_x$	$A{\in}\mathcal{A}_d$
CHIUSO (sottoinsieme) con complementare aperto	(M,d), spazio metrico, $C{\subseteq}M$ $M{\setminus}C{\in}\mathcal{A}_d$	$C{\in}\mathcal{C}_d$
INTERNO (di sottoinsiemi) il piú grande aperto contenuto	(M,d), spazio metrico, $E{\subseteq}M$ $\bigcup\{A{\in}\mathcal{A}\ :\ A{\subset}E\ \}$	$\mathring{E}$
CHIUSURA (di sottoinsiemi) il piú piccolo chiuso contenente	(M,d), spazio metrico, $E{\subseteq}M$ $\bigcup\{C{\in}\mathcal{C}\ :\ E{\subset}C\ \}$	$\overline{E}$
SUCCESSIONI DI CAUCHY	(M,d), spazio metrico, $\mathbf{x}{:}\mathbb{N}{\to}M$ $\forall\varepsilon{>}0\exists n_\varepsilon{:}\ \forall n,\ m\ {\geq}n_0\ \ \ d(x_n{,}x_m)\ \leq\ \varepsilon$	
SUCCESSIONE CONVERGENTE ad un punto x	(M,d), spazio metrico, $\mathbf{x}{:}\mathbb{N}{\to}M,\ x{\in}M$ $d(x_{k_n},x){\to}0,\ n{\to}{+}\infty$	$x_n{\to_d}x$
SEQUENZIALMENTE CHIUSO sottoinsieme per cui una successsione convergente nello spazio ambiente a valori nel sottoinsieme ha limite nel sottoinsieme stesso	(M,d), spazio metrico, $E{\subseteq}M,\ x{\in}E$ $\mathbf{x}{:}\mathbb{N}{\to}E,\ x_n{\to}x{\in}M\ \ \Rightarrow\ \ x{\in}E$	

in uno spazio metrico l'insieme ambiente e l'insieme vuoto sono aperti
in uno spazio metrico unione arbitraria di aperti ed intersezione finita di aperti sono aperte
un sottoinseme é chiuso in uno spazio metrico se e solo se é chiuso per successioni
in uno spazio metrico l'eventuale limite di una successione é unico
un sottoinsieme di uno spazio metrico completo é chiuso se e solo se é metrico completo per la distanza ristretta
uno spazio compatto é completo
uno spazio completo é compatto se e solo se é totalmente limitato

Nota : In generale la chiusura di una palla non é la palla chiusa con stesso raggio e stesso centro.

1. **Distanze indotte da norme.** Se V è uno spazio vettoriale ν é una norma su V si ha che $d_\nu(u,v) =: \nu(u-v)$ é una distanze su V. Viceversa data una distanza d su V per cui:

$$d(u,v) = d(u+w, v+w) \text{ invarianza per translazioni}$$

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v) \text{ proprietá di Talete}$$

allora $\nu_d(u) =: d(0,u)$ é una norma, e $d_{\nu_d} = d$.
Dim.: - $d_\nu(u,v) = \nu(u-v) = \nu(v-u) = d_\nu(v,u)$; $0 = d_\nu(u,v) = \nu(u-v) \Leftrightarrow u = v$; $d_\nu(u,v) = \nu(u-v) = \nu(u-w+(w-v)) \leq \nu(u-w)+\nu(w-v) = d(u,w)+d(w,v)$.
- $0 = \nu_d(u) = d(0,u) \Leftrightarrow u = 0$; $\nu_d(\lambda u) = d(0,\lambda u) = d(\lambda 0, \lambda u) = |\lambda| d(0,u) = |\lambda| \nu_d(u)$; $\nu_d(u+v) = d(0,u+v) \leq d(0,-u) + d(-u,u+v) = d(0,-u) + d(0,v) = \nu_d(u) + \nu_d(v)$.

2. Esempi di spazi con prodotto scalare o prodotto hermitiano, e norme e distanze a loro associate:
a) Esempi:

- $\mathbb{R}, \ (x \cdot y) = x \cdot y, \ |x| = \sqrt{x \cdot x}, \ d(x, y) = |x - y|$
- $\mathbb{R}^2, \ ((a, b) \cdot (\alpha, \beta))_{\mathbb{R}^2} = a\alpha + b\beta,$
  $|(a, b)| = \sqrt{((a, b)) \cdot (a, b))} = \sqrt{a^2 + b^2},$
  $d_{\mathbb{R}^2}((a, b), (\alpha, \beta)) = |(a, b) - (\alpha, \beta)|$
- $\mathbb{C}, \quad x = a + ib, \ y = \alpha + i\beta, \ (x \cdot y) = x \cdot \bar{y} = (a\alpha + b\beta) + i(-a\beta + b\alpha) =$
  $= ((a, b) \cdot (\alpha, \beta))_{\mathbb{R}^2} - i \ \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \ |x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}},$
  $d(x, y) = |x - y| = d_{\mathbb{R}^2}((a, b), (\alpha, \beta))$
- $\mathbb{R}^n, \ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \ |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}, \ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$
- $\mathbb{C}^n, \ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j, \ |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}, \ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$
- $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ = \ \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \ < \ +\infty \ \}, \ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$
  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$
- $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{C}), \ (f \cdot g)_{L^2(a;b)} = \int_{[a;b]} f(t)\overline{g(t)}\, dt$
  $|f|_{L^2(a;b)} = \sqrt{(f \cdot f)}, \ d(f, g) = |f - g| = \sqrt{\int_{[a;b]} |f(t) - g(t)|^2\, dt},$
- $\mathcal{C}^k([a; b], \mathbb{C}),$
  $(f \cdot g)_{H^{k,2}(a;b)} = \sum_{h=0}^{k} (\frac{d^h f}{dt^h} \cdot \frac{d^h g}{dt^h})_{L^2(a;b)} = \sum_{h=0}^{k} \int_{[a;b]} \frac{d^h f}{dt^h} \frac{d^h \bar{g}}{dt^h}\, dt,$
  $|f|_{H^{k,2}(a;b)} = \sqrt{(f \cdot f)}, \ d(f, g) = |f - g|$

Per provare che gli spazi prehilbertiani definiscono in effetti spazi normati, e per provare anche che in tutti gli esempi sopra elencati le forme bilineari sono ben definite si considera un asserto astratto che si basa sulla diseguaglianza elementare $2ab \le a^2 + b^2$ e generalizza il fatto che il rettangolo ha area massima tra i parellelogrammi con lunghezze dei lati assegnati.

b) **Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B}(u, v) = u \cdot v$, è: lineare nella prima variabile, antilineare nella seconda variabile, $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$, $u \cdot u \ge 0$ allora si ha:

$$\boxed{|u \cdot v| \ \le \ \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}.}$$

Dim.: $\forall t \in \mathbb{R} : \ \mathcal{B}(u + tv, u + tv) \ge 0$, cioè: $v \cdot vt^2 + 2tRe(u \cdot v) + u \cdot u \ge 0$.
Nel caso degenere $v \cdot v = 0$ ne segue che $Re(u \cdot v) = 0$, e considerando $u - tv$ anche che $Im(u \cdot v) = 0$. Altrimenti si ha un trinomio di secondo grado sempre positivo per cui il discriminante non è positivo cioè:

$$|Re(u \cdot v)| \ \le \ \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}.$$

Posto $z = u \cdot v$ si ha che $w = |z| = zz^{-1}|z|$ è reale ed ha lo stesso modulo di z. Ma $|z| = (z^{-1}|z|u) \cdot v$, e $u \cdot u = (z^{-1}|z|u) \cdot (z^{-1}|z|u)$. Per cui applicando la precedente diseguaglianza a $z^{-1}|z|u$ e v si ottiene quanto desiderato.

c) Vale l'analoga diseguaglianza nel caso reale cioè con le seguenti ipotesi: V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(u,v) = u \cdot v$, è: separatamente lineare nella prima variabile, separatamente lineare nella seconda variabile, $u \cdot v = v \cdot u$, $u \cdot u \geq 0$.
d) Nelle precedenti ipotesi si ha $\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)} \leq \sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v}$.
Norma associata ad un prodotto scalare. In particolare se $\mathcal{B}$ è un *prodotto scalare* su V, ovvero un prodotto hermitiano nel caso complesso, cioè vale anche: $u \cdot u = 0$ solo se $u = 0_V$, si ha che:

$$\boxed{u \mapsto \sqrt{u \cdot u} \text{ è una norma su } V.}$$

Dim.: $(u+v)\cdot(u+v) = u \cdot u + v \cdot v + 2Re(u \cdot v) \leq u \cdot u + v \cdot v + 2\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = (\sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v})^2$.
e) Una norma $u \mapsto |u|$ deriva da un prodotto scalare se e solo se vale l'identità del parallelogramma:

$$|x|^2 + |y|^2 = \frac{|x+y|^2 + |x-y|^2}{2}$$

(*) Nel caso si ha che $\varphi(x,y) = \frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ è il prodotto scalare cercato.

f) In uno spazio prehilbertiano $(x \cdot y) = |x||y|$ se e solo se x ed y sono linearmente dipendenti. In particolare se $|x+y| = |x| + |y|$ allora x ed y sono linearmente dipendenti.

g) - Si provi che lo spazio $\mathcal{C}([a;b])$ con la funzione $d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{[a;b]} |f-g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ è uno spazio metrico.
- Si provi che lo spazio delle funzioni Riemann integrabili su $[a;b]$ con la funzione $d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{[a;b]} |f-g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ **non** è uno spazio metrico.

h) Sia f una funzione Riemann integrabile su $[0;2\pi]$ allora:
- le sue componenti di Fourier $c_n = \int_0^{2\pi} f(\tau)\frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau$ sono una successione di l^2;
- le approssimanti di Fourier $S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$ sono una successione di Cuchy rispetto alla d_{L^2}.
Nota: - In generale le serie $S_N(t)$ possono non convergere, a t fissato, come serie numeriche.
- Se f è continua allora $d_{L^2}(f, S_N) \to 0$, $N \to +\infty$, cioè $S_N \to f$ nello spazio metrico $(\mathcal{C}([0;2\pi]), d_{L^2})$. Se poi f è 2π-periodica e (per esempio) C^1 si ha la convergenza uniforme.

3. Esempi di spazi normati e quasi-normati:

a) Esempi:

- $\mathbb{R}^2,\ |(x,y)|_{l^1} := |x| + |y|$, • $\mathbb{R}^2,\ |(x,y)|_{l^\infty} := \max\{|x|,|y|\}$,
- $\mathbb{R}^n,\ |\mathbf{x}|_{l^\infty} := \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$,
- $\mathbb{R}^n,\ 1 \le p < \infty\ |\mathbf{x}|_{l^p} := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
- $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ :\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\ \}$

  $|\mathbf{x}|_{l^\infty} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$
- $1 \le p < +\infty,\ l^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ :\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\ <\ +\infty\ \}$,

  $|\mathbf{x}|_{l^p} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
- Funzioni limitate su A, $|f|_{L^\infty} = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$,
- $1 \le p < +\infty$, Funzioni integrabili insenso generalizzato su A con potenza p sommabile

  $|f|_{L^p} = \left(\int_{[a;b]} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$,
- $\mathcal{C}^k([a;b]),\ 1 \le p < +\infty,\ |f|_{H^{k,p}} = \left(\sum\limits_{h=0}^{k} |f^{(h)}|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
- $\mathcal{C}^k([a;b]),\ |f|_{H^{k,\infty}} = \max\limits_{0\le h\le k} |f^{(h)}|_{L^\infty}$

b) Si disegnino nel piano gli insiemi $\{(x,y) :\ |(x,y)|_{l^p} \le 1\ \}$.

c) Provare che per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha: $|\mathbf{x}|_{l^\infty} \le |\mathbf{x}|_{l^p} \le n^{\frac{1}{p}} |\mathbf{x}|_{l^\infty}$.

d) - Provare che per le funzioni Riemann integrabili su $[a;b]$ si ha:
$|f|_{L^p} \le (b-a)|f|_{L^\infty}$.

- Provare che dato $[a;b]$ non esiste alcun numero $C > 0$ per cui
$|f|_{L^\infty} \le C|f|_{L^p}$.

Al fine di dimostrare che quelle definite sono in effetti delle norme (tranne che nel caso delle funzioni con potenza sommabile che possono annullare gli integrali senza essere nulle) è utile ricordare alcune importanti diseguaglianze:

e) **Diseguaglianza di Young.** Se $\psi : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, ψ strettamente crescente, $\psi(0) = 0$, si ha:

$$ab\ \le\ \int_{[0;a]} \psi(x)dx\ +\ \int_{[0;b]} \psi^{-1}(y)dy.$$

In particolare se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $ab\ \le\ \dfrac{a^p}{p}\ +\ \dfrac{b^q}{q}$

f) **Diseguaglianza di Hölder.** Si hanno le seguenti diseguaglianze quando o $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o $p = 1$ e $q = \infty$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n||y_n| \ \le \ |\mathbf{x}|_{l^p} |\mathbf{y}|_{l^q} \ , \quad |fg|_{L^1} \ \le \ |f|_{L^p} |g|_{L^q} \, .}$$

Dim. Si prova per le funzioni essendo il caso delle successioni del tutto analogo. Se una tra $|\mathbf{f}|_{L^p}$ e $|\mathbf{g}|_{L^q}$ è nulla, per definizione di integrale generalizzato di una funzione non negativa e per definizione di integrale di Riemann, si ottiene che il primo membro é anch'esso nullo. Se entrambi i numeri sono diversi da zero si ottiene grazie alla diseguaglianza di Young:

$$\frac{|f(x)|}{|f|_{L^p}} \frac{|g(x)|}{|g|_{L^q}} \le \frac{|f(x)|^p}{p|f|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q|g|_{L^q}^q} .$$

Integrando si conclude.

g) **Diseguaglianza triangolare.** Si ha per $1 \le p \le \infty$:

$$\boxed{|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_{l^p} \ \le \ |\mathbf{x}|_{l^p} \ + \ |\mathbf{y}|_{l^p} \ , \quad |f+g|_{L^p} \ \le \ |f|_{L^p} \ + \ |g|_{L^p} \, .}$$

Dim. Il caso $p = \infty$ si ottiene dalla diseguaglianza triangolare tra numeri e quindi passando all'estremo superiore. Per $p < \infty$:

$$\begin{aligned} \int |f+g|^p \ &\le \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \quad [\text{Hölder } q = \frac{p}{p-1} \,] \\ &\le \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Nota: Grazie a tale diseguaglianza si ha che le funzioni integrabili in senso generalizzato su A con potenza p sommabile sono uno spazio vettoriale, pur non essendo $f \mapsto |f|_{L^p}$ su questo spazio una norma.

h) Le norme L^p ed l^p, con $p \neq 2$, non provengono da un prodotto scalare, a parte il caso delle norme l^p su $\mathbb{R}$.

4. Spazi metrici.

GLOSSARIO	DEFINIZIONE	NOTAZIONE
FUNZIONE CONTINUA in un PUNTO $x\in M$ a valori in N	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $x\in M$ $\forall\ V\in\mathcal{I}_{f(x)}\ \exists\ \ U\in\mathcal{I}_x$ $\forall y\in U\ \Rightarrow\ f(y)\in V$	
FUNZIONE CONTINUA da (M,d) in (N,δ) (continua in ogni $x\in M$)	$f:(M,d)\to(N,\delta)$ $\forall\rho>0\ \ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{M}\ \exists\mathbf{r}\ \ \forall y\in M$ $d(x,y)\leq r\ \Rightarrow\ \delta(f(x),f(y))\leq\rho$	$f\in\mathcal{C}(M,N)$
FUNZIONE CONTINUA UNIFORMEMENTE su $E\subseteq M$ in (N,δ)	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $E\subseteq M$ $\forall\rho>0\ \ \exists\ \mathbf{r}>\mathbf{0}\ \ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{E}\ \ \forall y\in E$ $d(x,y)\leq r\ \Rightarrow\ \delta(f(x),f(y))\leq\rho$	
SEQUENZIALMENTE CONTINUA in un punto $x\in M$ a valori in N	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $x\in M$ $\forall x_n\to_d x\ \Rightarrow\ f(x_n)\to_\delta f(x)$	
LIMITE DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO NON ISOLATO	$x\in M$, $\forall U\in\mathcal{I}_x\ U\neq\{x\}$, $l\in N$ $\forall\ V\in\mathcal{I}_l\ \exists\ \ U\in\mathcal{I}_x$ $\forall y\in U\setminus\{x\}\ \Rightarrow\ f(y)\in V$	$f(y)\to_\delta l,\ \ y\to_d x$ $\lim_{y\to x} f(y)=l$
FUNZIONI HÖ LDERIANE di esponente $\alpha\in]0;1[$	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $\alpha\in]0;1[$ $\exists H>0\ \ \forall\ x,\ y\in M$ $\delta(f(x),f(y))\ \leq\ H(d(x,y))^\alpha$	
FUNZIONI LIPSCHTZIANE di costante L (L-lipschitziane)	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $\forall\ x,\ y\in M$ $\delta(f(x),f(y))\ \leq\ Ld(x,y)$	
CONTRAZIONI di uno spazio metrico in se	$f:(M,d)\to(M,d)$, $\lambda\in[0;1[$ f λ-lipschitziana	
IMMERSIONI ISOMETRICHE	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, $\forall\ x,\ y\in M$ $\delta(f(x),f(y))\ =\ d(x,y)$	
ISOMETRIE	$f:(M,d)\to(N,\delta)$, immersione isometrica surgettiva	

una funzione é continua in un punto x non isolato se e solo se $\lim_{y\to x} f(y)=f(x)$
una funzione definita su uno spazio metrico é continua se e solo se é continua per successioni
una funzione é continua tra due spazi metrici se e solo se la controimmagine di un aperto nel codominio é un aperto nel dominio
una funzione é continua tra due spazi metrici se e solo se la controimmagine di un chiuso nel codominio é un chiuso nel dominio
una funzione continua su un compatto é uniformemente continua
una funzione uniformemente continua in un sottoinsieme é estendibile con continuitá alla chiusura di questo
le isometrie di uno spazio normato in se che tengono fissa l'origine sono lineari

a) - Se (M,d) é uno spazio metrico ed $E \subseteq M$ allora $(E, d_{|_{E\times E}})$ é uno spazio metrico.
b) - Se (M,d) ed (N,δ) sono spazi metrici allora

$$\mathcal{B}(M,N) := \{\ f : M \to N\ :\ f(M) \text{ é limitato in } \ (N,\delta)\}\ ,$$
$$d_{\mathcal{B}}(f,g) = \sup_{x\in M} \delta(f(x), g(x))$$

é uno spazio metrico.

- L'insieme delle funzioni continue e limitate, $\mathcal{CB}(M,N) = \mathcal{C}(M,N) \cap \mathcal{B}(M,N)$ é chiuso in $(\mathcal{B}(M,N), d_{\mathcal{B}})$.

- Se V é uno spazio vettoriale ed E un insieme anche $\mathcal{B}(E,V)$ lo é, con le operazioni definite puntualmente.

- Se (V,ν) é uno spazio vettoriale normato e (M,d) uno spazio metrico allora anche $\mathcal{C}(M,V)$, $\mathcal{CB}(M,V)$ sono spazi vettoriali, ed inoltre $f \mapsto d_{\mathcal{B}}(f,\mathbf{0})$ é una norma su $\mathcal{B}(M,V)$, ove con $\mathbf{0}$ si é indicata la funzione identicamente nulla $x \mapsto 0_V$.

c) - Ogni spazio metrico (M,d) é immergibile **isometricamente** in uno spazio di normato: fissato $x_0 \in M$ si pone:

$$\Psi : M \to \mathcal{CB}(M,\mathbb{R})\ ,\quad \Psi(x) :\ y\ \mapsto d(x,y) - d(x_0,y)$$

d)- Uno spazio metrico si dice *separabile* se é chiusura di un suo sottoinsieme numerabile. In altri termini vi é una successione $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to M$ per cui ogni punto di M é limite di una sottosuccessione di $\mathbf{x}$.

- Gli spazi $\mathbb{R}^n$ sono separabili. Se $1 \le p < +\infty$ allora $l^p(\mathbb{N})$ é separabile. Invece $l^\infty(\mathbb{N})$ non é separabile (le successioni ognuna con valori 0 o 1 sono un insieme più che numerabile, ognuna a distanza 1 da un'altra).

- Ogni spazio metrico separabile é immergibile **isometricamente** nello spazio $l^\infty(\mathbb{N})$.

e) - Distanze geodetiche. Se si considera il "bordo del quadrato di lato 2"
$Q = \{(x,y)\ :\ \max\{|x|,|y|\} = 1\ \}$ si puó considerare su di esso la distanza indotta da quella di $\mathbb{R}^2$ (in modo che la distanza del punto $(1,1)$ dal punto $(0,-1)$ sia $1+\sqrt{2}$). Un'altra distanza pittosto naturale é quella di considerare come distanza tra due punti di questo insieme la minima lunghezza dei cammini continui che **congiungono i due punti** e **sono interamente contenuti in** Q (in questo caso la distanza del punto $(1,1)$ dal punto $(0,-1)$ é 3). Questa osservazione ha carattere molto generale.

- Se (M,d) é uno spazio metrico e $\gamma : [a;b] \to M$ la seguente funzione di γ rappresenta intuitivamente la "lunghezza del cammino percorso":

$$\mathrm{V}_a^b(\gamma) \ = \ \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{V}_{a,\varepsilon}^b(\gamma) \ = \ \inf_{\varepsilon>0}\ \sup\ \sum_{k=0}^{n} d(\gamma(t_{k+1}),\gamma(t_k))\ :$$
$$n\in\mathbb{N},\ a = t_0 < \ldots t_k < t_{k+1} < \ldots t_{n+1} = b,\ |t_k - t_{k+1}| \le \varepsilon$$

- Si ha $\mathrm{V}_a^b(\gamma) =$

$$\sup\left\{\ \sum_{k=0}^{n} d(\gamma(t_{k+1}),\gamma(t_k))\ :\ n\in\mathbb{N},\ a = t_0 < \ldots t_k < t_{k+1} < \ldots t_{n+1} = b,\ \right\}$$

- Tale nozione non dipende “dal tempo” nel seguente senso: se $\tau : [c; d] \to [a; b]$ é **continua, crescente, surgettiva**, e $\gamma : [a; b] \to M$ si ha:

$$\mathrm{V}_a^b(\gamma) \;=\; \mathrm{V}_c^d(\gamma \circ \tau)$$

- Sia (M, d) uno spazio metrico per cui:

per ogni $x,\ y \in M$ esiste $\gamma : [a; b] \to M$ tale che:

i) $\gamma \in \mathcal{C}([a; b], (M, d))$

ii) $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

iii) $\mathrm{V}_a^b(\gamma) \;<\; +\infty$

si definisce tra punti x e y di M:

$$g_d(x, y) \;=\; \inf\left\{\mathrm{V}_a^b(\gamma) \;:\; \gamma \in \mathcal{C}([a; b], (M, d)),\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\ \right\}$$

Si ha che g_d é in effetti una distanza su M, che viene detta *distanza geodetica* indotta dalla distanza d.

- In uno spazio normato (V, ν) la distanza geodetica (indotta dalla distanza indotta dalla norma ...) coincide con la distanza indotta dalla norma.

5) Completezza.

a) - In uno spazio metrico (M, d) l’immagine di una successione di Cauchy é un sottoinsieme totalmente limitato. In particolare é un sottoinsieme limitato.

Dim.: Sia $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to M$ una successione di Cauchy:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon :\ \forall n,\ m\ \geq n_\varepsilon\ \ d(x_n, x_m)\ \leq\ \varepsilon$
Si tratta di dimostrare che: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N_\varepsilon\ \exists\ y_1 \ldots y_N \in M$:

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \min_{1 \leq i \leq N}\ d(x_n, y_i) \leq\ \varepsilon$

ovvero:

$$\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}\ \subseteq\ B(y_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(y_N, \varepsilon)$$

Quindi dato il raggio ε si considera $N_\varepsilon = n_\varepsilon$ dato dalla condizione di Cauchy sulla successione. Quindi si scelgono i centri $y_i = x_i$, $1 \leq i \leq N$. Chiaramente gli elementi dell’immagine della successione $x_1 \ldots x_N$ appartengono all’unione del numero finito di palle scelte di raggio ε (ne sono i centri). Se poi si considerano gli elementi x_n con $n > N$ per la scelta di $N = n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, y_N) \leq \varepsilon$, cioé $x_n \in B(y_N, \varepsilon)$.

b) - In $\mathbb{R}^M$ una successione $\{(x_n^1, \ldots x_n^M)\}_{n \in \mathbb{N}}$é di Cauchy se e solo se sono di Cauchy le M successioni di numeri reali delle componenti:
$\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, \{x_n^M\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Analogamente in $\mathbb{R}^M$ una successione é convergente se e solo se lo sono le M successioni di numeri reali delle componenti. Si tratta delle diseguaglianze
Si tratta delle diseguaglianze $\max_{1 \leq i \leq M} |x^i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^M |x^i|$.

- Lo spazio $\mathbb{R}$ é completo. Quindi gli spazi $(\mathbb{R}^M, d_{l^p})$ sono anch’essi completi. Grazie alla diseguaglianza $|\mathbf{x}|_{l^\infty} \leq |\mathbf{x}|_{l^p} \leq M^{\frac{1}{p}} |\mathbf{x}|_{l^\infty}$ basta provarlo per $p = 2$.

c) - Se (N, δ) é completo allora $(\mathcal{B}(M, N), d_{\mathcal{B}})$ é completo.

- Se (N, δ) é completo allora $(\mathcal{CB}(M, N), d_{\mathcal{B}})$ é completo.

- Gli spazi $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ sono spazi metrci completi, ovvero sono spazi di Banach con le relative norme.

Dim.: Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni di l^p:

$$\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^k \ldots).$$

i) Se $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é di Cauchy in l^p si ha che ogni successione di numeri reali data dalle componenti, $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, é di Cauchy. Anzi sono di Cauchy uniformemente al variare di $k \in \mathbb{N}$. Infatti:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n^k - x_m^k| \ \leq \ |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|_{l^p}.$$

Quindi essendo $\mathbb{R}$ completo si ha:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x^k \in \mathbb{R} \quad : \quad x_n^k \to_{n\to\infty} x^k.$$

ii) Si tratta di provare che $\mathbf{x} := (x^1, \ldots x^k \ldots)$ é una successione di l^p e inoltre che $\mathbf{x}_n \to_{n\to\infty} \mathbf{x}$ in norma l^p, e non solo puntualmente. Si esemina il caso $1 \leq p < \infty$ per comoditdi scrittura, essendo il caso $p = \infty$ analogo epiú semplice

iii) Essendo $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy si ha:

$$\forall \varepsilon \ \exists \ N = N_\varepsilon \ : \qquad \forall \ m, n \geq N \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_m^k - x_n^k|^p \ \leq \ \varepsilon^p$$

in particolare

$$\forall M \ \forall \ m, n \geq N \ \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x_n^k|^p \ \leq \ \varepsilon^p$$

fissato M per $n \to \infty$ si ha

$$\forall \ M \quad \forall \ m \geq N \ \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x^k|^p \ \leq \ \varepsilon^p$$

In conclusione si é ottenuto

$$\forall \varepsilon \quad \exists N = N_\varepsilon \qquad \forall \ M \quad \forall \ m \geq N \quad \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x^k|^p \ \leq \ \varepsilon^p$$

Passando all'estremo superiore su M si ha quindi:

$$\forall \varepsilon \quad \exists N = N_\varepsilon \qquad \forall \ m \geq N \quad |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|_{l^p}^p \ \leq \ \varepsilon^p$$

Cioé $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|_{l^p} \to 0$, $m \to \infty$. In particolare per $m \geq N_1$ si ha che $\mathbf{x}_m - \mathbf{x} \in l^p$, ed essendo anche $\mathbf{x}_m \in l^p$ dalla diseguaglianza triangolare si ha che $\mathbf{x} \in l^p$.

- (Esercizio) i) Se (M, d) é uno spazio metrico completo e ogni due punti possono essere congiunti con un cammino continuo con lunghezza finita allora M con la distanza geodetica indotta é uno spazio metrico completo.

ii) Il prodotto $(M \times N, ((x, y), (a, b)) \mapsto d(x, a) + \delta(y, b))$ di due spazi metrici completi é completo.

iii) In uno spazio metrico (M, d) ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ per cui $\sum d(y_k, y_{k+1}) < +\infty$.

iv) In uno spazio metrico (M, d) ogni successione di Cauchy che abbia una sottosuccessione convergente, converge essa stessa al limite individuato dalla sottosuccessione.

6. [*Un principio di punto fisso*] Il principio delle contrazioni non solo da un criterio di esistenza ma permette di dare un metodo di approssimazione. Esso è piuttosto utile per problemi *'non lineari'* in mancanza di strumenti algebrici, ed è molto semplice da dimostrare.

a) [Lemma delle contrazioni di Banach-Cacciopoli] Sia (M, d) uno spazio *metrico*, e sia $g : M \to M$ una *contrazione*, cioè vi sia λ positivo e strettamente minore di 1 per cui

$$d(g(x), g(y)) \ \le \ \lambda d(x, y).$$

i)[*Stima dell'errore*] Allora dato $x \in M$ *l'orbita* di x mediante f, cioè la successione definita da $g^0(x) = x,\ g^{n+1}(x) = g(g^n(x))$ è di Cauchy, con stima *a priori* dell'errore:

$$d(g^{n+k}(x), g^n(x)) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, g(x)).$$

ii)[*Stabilità*] Inoltre comunque dati x ed y in M si ha $d(g^n(x), g^n(y)) \le \lambda^n d(x, y)$.

iii) [*Convergenza*] In particolare se lo spazio metrico M è *completo* e g è una contrazione su M vi è un *unico punto fisso*, cioè l'equazione $g(x) = x$ ha un unica soluzione $x \in M$.

Dim. Il secondo punto $d(g^n(x), g^n(y)) \le \lambda d(g^{n-1}(x), g^{n-1}(y)) \le \ldots \le \lambda^n d(x, y)$ si prova direttamente per induzione.
Per provare il primo punto si applica tale diseguaglianza con $y = g^k(x)$, e si prosegue induttivamente applicando $k - 1$ volte la diseguaglianza triangolare

$$d(g^{n+k}(x), g^n(x)) \le \lambda^n d(g^k(x), x) \le \lambda^n \left(d(g^k(x), g^{k-1}(x)) + \ldots + d(g(x), x)\right).$$

quindi ad ognuno dei k addendi si applica ancora la diseguaglainza del secondo punto ottenendo la somma parziale della serie geometrica di ragione λ per $d(g(x), x)$:
$d(g^{n+k}(x), g^n(x)) \le \lambda^n d(g^k(x), x) \le \lambda^n \left(\lambda^{k-1} + \ldots + 1\right) d(g(x), x) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(g(x), x)$.
Infinie nel caso in cui lo spazio sia completo dalla prima diseguaglianza si ha che le orbite sono una successione di Cauchy e quindi convergente $g^n(x) \to f$. D'altronde essndo g continua $g^{n+1}(x) = g(g^n(x)) \to g(f)$ per cui $f = g(f)$. Questo sarà in effetti l'unico punto fisso: se $g(u) = u$ $d(u, f) = d(g(u), g(f)) \le \lambda d(u, f)$ per cui essendo $\lambda < 1$ si ha $d(u, f) = 0$.

b) [Contrazioni con parametro] Sia (M, d) uno spazio *metrico completo*, e sia $g_s : M \to M$ una *famiglia di contrazioni*, di rispettivi punti fissi f_s, per cui
$\lim_{s \to s_0} \sup_{x \in M} d(g_s(x), g_{s_0}(x))$.
Allora $s \mapsto f_s$ è continua in s_0.

Dim. Poichè $(x, y) \mapsto d(x, y)$ è continua si ha

$$d(f_s, f_{s_0}) = \lim_{n \to +\infty} d(g_s^n(x), g_{s_0}^n(x) \le \sup_{x \in M} d(g_s(x), g_{s_0}(x))$$

-(Esercizio) i) Se (M, d) è uno spazio metrico completo ed $g : M \to M$ è tale che $\sum_{n \ge 0} d(g^n(x), g^n(y)) < \infty$ allora g ha un unico punto fisso.

ii) Se per qualche $m \in \mathbf{N}$ la funzione g^m è una contrazione di fattore $\lambda < 1$, allora g ha un unico punto fisso
[si osservi che: $d(g^n(x), g^{n+m}(x)) \le \lambda^{[n/m]} \max_{r<m} d(g^r(x), g^{m+r}(x))$ e quindi converge a 0 per $n \to \infty$; analogamente si ottiene che $g^n(x)$ è di Cauchy. Si conclude grazie all'unicità del punto fisso di g^m].

iii) Se lo spazio metrico è compatto e $d(g(x), g(y)) < d(x, y)$ allora g ha un unico punto fisso.

7. [**Teorema di Baire:**] In uno spazio metrico **completo** (M,d) l'insieme M non é unione di una famiglia numerabile di suoi sottoinsiemi, ognuno dei quali abbia chiusura **in** (M,d) con parte interna **in** (M,d) vuota:

$$X_n \subset M,\ \overset{\circ}{\overline{X}}_n = \emptyset \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq M.$$

Equivalentemente in uno spazio metrico **completo** (M,d) l'intersezione di una famiglia numerabile di suoi sottoinsiemi aperti densi é un sottoinsieme denso.
a) **Dim.:** Un sottoinsieme D si dice denso in (M,d) se la sua intersezione con ogni aperto non vuoto é non vuota.

- Si considera una successione di aperti densi A_n ed un aperto non vuoto A. Si definisca una successione di palle aperte non vuote $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tutte contenute in A come segue:

B_0 una qualsiasi palla aperta non vuota contenuta in A, $\quad B_{n+1} = B(x_n, r_n)$, con $x_n \in B_n$ e $0 < r_n < \frac{1}{n}$ in modo che $\overline{B(x_n, r_n)} \subset A_n \cap B_n$.

- Poiché la successione delle palle é decrescente per l'inclusione e i loro raggi sono infitesimi la successione dei loro centri é di Cauchy in (M,d). Poiché (M,d) é completo vi é $x \in M$ limite dei centri in (M,d): $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$.

- Poiché $x_{n+m} \in \overline{B_n}$ si ha passando al limite per $m \to \infty$ che x appartiene al chiuso $\overline{B_n}$. Quindi $x \in \bigcap \overline{B_n}$, in particolare tale intersezione risulta *non vuota.* D'altronde $\overline{B_n} \subseteq A \cup \bigcap A_n$.
-(Esercizio:) si provi l'equivalenza dei due enunciati.

b) - Lo spazio vettoriale normato $(V, \int |f|dx)$ delle classi di equivalenza di funzioni Riemann integrabili in senso generalizzato e sommabili, $\Big(f \sim g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\int_{-n}^{n} \min\{n, |f-g|\}dx = 0\Big)$, non é completo rispetto alla norma $\int |f|dx$.

- Per la diseguaglianza triangolare degli integrali, per la Lipschitzianitá di $x \mapsto x \wedge c$ e $x \mapsto x \vee c$, e per le proprietá di reticolo dell'integrale di Riemann si ha che l'insieme B, delle classi di equivalenza di funzioni Riemann sommabili in senso generalizzato nulle fuori da $[0;1]$, per cui $0 \le f \le 1$, é chiuso in $(V, \int |f|dx)$:

$\int |f - ((f\chi_{[0;1]}) \wedge 1) \vee 0|dx \le \int |f_n - ((f_n\chi_{[0;1]}) \wedge 1) \vee 0|dx + \int |((f_n\chi_{[0;1]}) \wedge 1) \vee 0 - ((f\chi_{[0;1]}) \wedge 1) \vee 0|dx + \int |f_n - f|dx \le 2\int |f_n - f|dx$.

- Quindi per dimostrare che lo *spazio normato* $(V, \int |f|dx)$ non é completo basta mostrare che lo *spazio metrico* $(B, \int |f-g|dx)$ non é completo. Ció non solo é piú comodo, poiché queste sono classi di equivalenza di funzioni Riemann integrabili e la relazione di equivalenza si riduce a $\int |f-g|dx = 0$, ma mette in evidenza che la mancanza di completezza delle funzioni Riemann integrabili non dipende solo dalla loro limitatezza. Analoghe considerazioni valgono per le altre norme integrali.

- Per dimostrarlo in maniera agevole usualmente si fa ricorso ai concetti tipici dell'integrazione alla Borel-Lebesgue: cfr. esercizi 5-6-7 III foglio. Si potrebbe dimostrare anche in modo laborioso ed atratto usando appunto il Teorema di Baire.

9. Connessione (cenni).

Vi sono due idee intuitive di base al concetto di essere *connesso*: poter congiungere due arbitrari punti (con un cammino continuo), e essere fatto di un unico pezzo (non sono definite funzioni continue con solo due valori).

Definizione di connesso: Uno spazio metrico (M,d) si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi di M che sono *sia aperti* in (M,d) *che chiusi* in (M,d) sono solamente $\emptyset$ ed M stesso. In altre parole non vi è una partizione dello spazio in due aperti disgiunti e non vuoti.

Definizione di connesso per archi: Uno spazio metrico (M,d) si dice *connesso per archi* continui se per ogni paio di punti vi é un cammino che sia:
i- *a valori* in M;
ii- *continuo* in (M,d);
iii- che *congiunge* i due dati punti.
In altri termini $\forall x,y \in M \ \exists \gamma \in \mathcal{C}\left([0;1],(M,d)\right): \ \gamma(0)=x, \ \gamma(1)=y$.

- Chiaramente la connessione per archi puó essere specializzata (o indebolita), richiedendo che i cammini congiungenti verifichino altree proprietá. Un esempio tipico é quello degli spazi metrici per cui é possibile definire la distanza geodetica.
- Un altro esempio é quello della *connessione con un numero finito di "poligonali*, che non richiede la struttura di spazio metrico ma semplicemente quella di essere sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale: $\ y = x + \sum_1^N v_i$.
a) - I sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con la metrica indotta che risultano connessi sono tutti e soli gli intervalli, le semirette, $\emptyset$, ed $\mathbb{R}$ stesso.
- Se uno spazio é connesso per archi allora é connesso.
- Il seguente esempio mostra che vi sono spazi connessi non connessi per archi: si considera il grafico della funzione $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, $x>0$ unito al punto $(0,0)$ con la distanza indotta da quella euclidea in $\mathbb{R}^2$: $M = \{(x,\sin\frac{1}{x}): \ x>0\} \cup \{(0,0)\}$.
- Gli aperti di spazi di normati, con la distanza indotta dalla norma, sono connessi se e solo se sono connessi per archi.
- (Esercizio:) i) L'unione di due sottoinsiemi di uno spazio metrico connessi per la metrica indotta, non disgiunti é connessa. Sostituendo e nell'ipotesi e nella tesi alla connessione la connessione per archi l'asserto é ancora vero?
ii) Se (M,d) e (N,δ) sono spazi connessi allora $(M\times N, ((x,y),(a,b)) \mapsto d(x,a)+\delta(y,b))$ é uno spazio metrico connesso.
iii) La chiusura in uno spazio metrico di un sottoinsieme connesso per la distanza indotta é un sottoinsieme connesso.
b) - Sia $f \in \mathcal{C}\left((M,d),(N,\delta)\right)$ allora l'immagine di un sottoinsieme di M connesso [connesso per archi] per la distanza indotta da d é un sottoinsieme di N connesso [connesso per archi] per la distanza indotta da δ. (Questa proprietá estende il teorema del valore intermedio per funzioni reali di una variabile reale).
- Sia $f \in \mathcal{C}\left((M,d),(N,\delta)\right)$, (M,d) connesso. Se f é localmente costante $(\forall x \in M \ \exists r \ f\left(B(x,r)\right) = \{f(x)\})$ allora f é costante.
-(Esercizio *****:) i) É vero che se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trasforma connessi in connessi allora é continua?
ii) Si provi che non vi álcuna funzione $f \in \mathcal{C}\left([0;1],[0;1]^2\right)$ che sia bigettiva ed abbia anche inversa continua.
iii) Si trovi un sottoinsieme S connesso di $\mathbb{R}^2$ ed una funzione iniettiva $f:S\to\mathbb{R}$ che sia continua da S con la distanza indotta da quella di $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$ con l'usuale distanza, ma che non abbia inversa continua. É possibile trovare una tale accoppiata S ed f in modo che S sia anche chiuso? E chiuso limitato?
iv) Sia $f:(M,d)\to(N,\delta)$. Se (M,d) é connesso ed f é continua allora il suo grafico é un sottoinsieme connesso di $(M\times N, ((x,y),(a,b)) \mapsto d(x,a)+\delta(y,b))$.
v) Si trovi una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con grafico connesso ma non continua.

10. Compattezza (cenni).

- Vi sono molti problemi di diverso interesse in cui si chiede di determinare il minimo di certe grandezze e in che situazioni viene assunto. In molti casi i così detti principi di minimo vengono assunti come fondamentali. In molti altri casi poter vedere la risolubilitá di un equazione come problema di minimo puó essere di aiuto sia per provare l'esistenza della soluzione sia per trovare metodi di calcolo ed approssimazione.

Al fine di ottenere teoremi generali di esistenza per problemi di minimo in contesti astratti, una delle nozioni piú importanti, che estende una proprietá elementare degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, é quella della *sequenziale compattezza*, che si estende a quella di *compattezza*.

- Se $I \subset \mathbb{R}$ é un intervallo **chiuso** e **limitato** allora da ogni successione a valori in I si puó estrarre una **sottosuccessione convergente** e il suo limite **appartiene ad** I.
- $C \subseteq \mathbb{R}$: $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \; \exists l \in C \;\&\; \exists \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to l \iff C$ **chiuso** e **limitato** .
- Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ **chiuso** e **limitato**, ed $f : C \to \mathbb{R}$ **continua**

$$\Downarrow$$

f **assume in** C valore **massimo** e valore **minimo**.
- $C \subseteq \mathbb{R}^N$: $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C \; \exists l \in C \;\&\; \exists \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to l \iff C$ **chiuso** e **limitato**.

Dim.: $\Rightarrow$) Come per il caso $N = 1$.
$\Leftarrow$)Per induzione sulla dimensione N.
Sia C sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^{N+1} \sim \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $x \sim (y,t)$.
- Poiché $|t|$, $|y|_{\mathbb{R}^N}$ sono minori di $|(y,t)|_{\mathbb{R}^{N+1}}$ dalla limitatezza di C in $\mathbb{R}^{N+1}$ segue che se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, $x_n = (y_n, t_n)$, le due successioni $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sono limitate. Per ipotesi induttiva vi é una sottosuccessione $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, e per quanto vale con $N = 1$ vi é una sottosuccessione $\{t_{k_{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Quindi $\{x_{k_{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, poiché $|(y,t)|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq |t| + |y|_{\mathbb{R}^N}$.
- Essendo C chiuso e la successione a valori in C il limite é elemento di C.
- Sia $C \subseteq \mathbb{R}^N$ **chiuso** e **limitato**, ed $f : C \to \mathbb{R}$ **continua**

$$\Downarrow$$

f **assume in** C valore **massimo** e valore **minimo**.

Dim.: Come nel caso $N = 1$.

Definizione: Uno spazio metrico si dice *compatto per successioni* se da ogni successione a valori in esso si puó estrarre una sottosuccessione **convergente** ad un elemento dello spazio **stesso.**

- Sia (M, d) uno spazio metrico e $C \subseteq M$.
C sequenzialmente compatto per la distanza indotta $\Longrightarrow C$ chiuso e limitato.
- Si consideri la palla unitaria chiusa di centro l'origine in l^2. é un chiuso ed é ovviamente un limitato. D'altronde la successione (di successioni): $x_1 = (1, 0 \ldots), x_2 = (0, 1, 0 \ldots), \ldots, x_n(h) = \delta_{nh}$, non puó avere alcuna sottosuccessione convergente. Infatti se $n \neq m$ si ha $|x_n - x_m|_{l^2} = \sqrt{2}$. Quindi nessuna sottosuccessione puøessere di Cauchy. tantomeno convergente.
Questo argomento mostra che in ogni spazio di Hilbert di dimensione infinita la palla unitaria chiusa non è compatta. Basta infatti considerare un sistema *ortonormale* numerabile.
- Più in generale: in uno spazio di Banach la palla unitaria chiusa è sequenzaqilmente compatta se e solo se la dimensione è finita.
- Sia (M, d) uno spazio metrico sequenzialmente compatto.
C é chiuso in (M, d) se e solo se é sequenzialemte compatto per la distanza indotta.
- Va notato che in ambito più generale di quello degli spazi metrici vale solo che un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto ma non viceversa. Il viceversa richiede che due punti distinti abbiano due rispettivi intorni disgiunti

Definizione: Una funzione $f : (M,d) \to \mathbb{R}$ si dice *semicontinua inferiormente [superiormente]* per successioni in un punto x di M se:

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_d x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$ $[\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)]$

Se una funzione é semicontinua inferiormente [superiormente] in ogni punto si dirá semicontinua inferiormente [superiormente] in (M,d).

- Sia (M,d) é sequenzialmente compatto, e $f : M \to \mathbb{R}$ é s.s.c.i [s.s.c.s.]

$$\Downarrow$$

f assume in M valore minimo [massimo].

Dim.: Come nel caso $(M,d) = (\mathbb{R}, |x|)$ ed f continua, con la variante che nell'ultimo passaggio si ha: $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \inf_M f$.

-(Esercizio:) i) Una funzione reale definita su uno spazio metrico é semicontinua inferiormente se e solo se il suo *sopragrafico* é chiuso nello spazio prodotto.

ii) Una funzione reale definita su uno spazio metrico é semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in M : f(x) \leq c\}$ é chiuso in (M,d).

iii) Estremo superiore di una famiglia di funzioni semicontinue inf., somma di funzioni semicontinue inf., prodotto per una costante positiva di una funzione semicontinua inf. sono semicontinue inf..

iv) Sia (M,d) seq. comp.. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é tale che $\forall g \in \mathcal{C}((M,d),\mathbb{R})\ \exists \min_M(f+g)$ allora f é s.s.c.i. in (M,d)?

- Uno spazio metrico é **completo** e **totalmente limitato** se e solo se é sequenzialmente compatto.

Dim.: $\Rightarrow$) Sia (M,d) nelle ipotesi asssunte. Si consideri $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$.

- Per l'ipotesi di totale limitatetzza per ogni $m \in \mathbb{N}$ si consideri $\mathcal{R}_m$ un ricoprimento finito di M con palle chiuse di raggio $\frac{1}{m}$. Per ogni m, essendo le palle di raggio $\frac{1}{m}$ in numero finito se ne trova una in cui la successione passa infinite volte. Si scelgono B_m, $m \in \mathbb{N}$ tra tali palle in modo che: per ogni $m \in \mathbb{N}$ nell'intersezione $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ la successione passi infinite volte. Ció épossibile (induttivamente) poiché se le unione delle palle di $\mathcal{R}_{m+1}$ ricopre tutto M ricopre anche l'intersezione $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ delle palle scelte in precedenza. Si sceglie arbitrariamente una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tra quelle per cui $x_{k_n} \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$.

Essendo i raggi delle palle B_m infinitesimi e la famiglia $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ decrescente si ha che tali sottosuccessioni sono di Cauchy.

- Usando l'ipotesi di completezza si conclude.

$\Leftarrow$) Immediato.

- Le seguenti condizioni sono equivalenti per uno spazio metrico (M,d):

i) COMPATTEZZA: ogni arbitraria collezione di sottoinsiemi **aperti** per (M,d) la cui unione é **tutto** M ha una sottofamiglia **finita** la cui unione é ancora M:

$A_i = \mathring{A}_i,\ i \in I,\ \bigcup_{i\in I} A_i = M \Longrightarrow \exists i_1, \ldots i_N \in I : = A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} = M.$

ii) ogni arbitraria collezione di sottoinsiemi **chiusi** le cui sottofamiglie finite hanno intersezione non vuota ha intersezione non vuota:

[**P**roprietá **I**ntersezione **F**inita $\Longrightarrow$ **I**ntersezione non vuota]

iii) (M,d) é sequenzialmente compatto.

- Una funzione **continua** tra due spazi metrici **trasforma** sottoinsiemi **compatti** (per la distanza indotta nel dominio) **in** sottoinsiemi **compatti** (per la distanza indotta nel codominio).

- In particolare l'immagine di uno spazio metrico compatto mediante una funzione continua é un sottoinsieme compatto (per la distanza indotta nel codominio).

- Una funzione continua da uno spazio metrico compatto ad uno spazio metrico che sia anche bigettiva trasforma insiemi aperti in insiemi aperti. Equivalentemente la sua **inversa é continua**.

- (Esercizio) i) É vero che una funzione continua tra due spazi metrici trasforma sottoinsiemi totalmente limitati in sottoinsiemi totalmente limitati?

ii) É vero che se (M, d) é uno spazio metrico completo, e vi é una funzione continua e surgettiva da (M, d) su uno spazio metrico (N, δ) allora anche (N, δ) é completo?

- **Definizione:** Una funzione $f : (M, d) \to (N, \delta)$ si dice *uniformemente continua* se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ : \ \forall x, \ y \in M \ d(x, y) \leq \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

$$\text{In altre parole: } \sup_{\substack{x,y \in M \\ d(x,y) \leq r}} \delta(f(x), f(y)) \to 0 \ , \quad r \to 0^+.$$

- (Esercizio) i) Una funzione é uniformemente continua se e solo se $d(x_n, y_n) \to 0 \ \Rightarrow \ \delta(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

ii) Se una funzione é uniformemente continua allora trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. É vero il viceversa?

iii) Siano (M, d), (N, δ) spazi metrici completi, e sia $A \subset M$. Se $f : (A, d_{|_{A \times A}}) \to (N, \delta)$ é uniformemente continua allora vi é un'unica estensione continua di f da $(\overline{A}, d_{|_{\overline{A} \times \overline{A}}})$ a (N, δ). Equivalentemente una funzione uniformemente continua tra due spazi metrici ha un'unica estensione continua dal completamento del dominio a valori nel completamento del codominio. Tale estensione risulta anche uniformemente continua.

- Una funzione **continua** su uno spazio **totalmente limitato** é anche **uniformemente continua**.

Teorema (Ascoli Arzelà) Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni continue da (X, d) compatto in (Y, δ) completo ha chiusura compatta in $\mathcal{C}(X, Y)$ con la distanza uniforme se e solo se:

- $\mathcal{F}(x) =: \{y : \exists f \in \mathcal{F} y = f(x)\}$ è relativamente compatta per ogni $x \in X$
- $\mathcal{F}$ è equicontinua: $\lim_{z \to x} \sup_{f \in \mathcal{F}} \delta(f(x), f(z)) = 0$

(equivalentemente, grazie alla compattezza di X equiuniformemente continua
$\lim_{r \to 0} \sup_{d(x,z) \leq r} \sup_{f \in \mathcal{F}} \delta(f(x), f(z)) = 0$)

11. Spazi topologici. Molti concetti relativi alla continuità possono essere espressi in ambiti più generali degli spazi metrici. In effetti non sempre si incontrano nozioni di approssimazione e convergenza che derivano da una distanza.
a) Una struttura di spazio topologico su un insieme X è data da un insieme $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X, detti *aperti* , per cui
- $X,\ \emptyset \in \mathcal{A}$ - $A,\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ - $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}$
Un chiuso è il complementare di un aperto.
b) topologia relativa: dato un sottinsieme C di X con struttura di spazio topologico $(X, \mathcal{A})$ la famiglia $\{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$ è una struttura topologica su C.
c) Dare la nozione di aperto in modo assiomatico e non in dipendenza da una distanza permettere di estendere molti concetti:
- Un sottoinsieme U di uno spazio topologico si dice intorno di un punto x dello stesso se vi è un aperto A per cui $x \in A \subseteq U$.
In generale a differnza deggli spazi metrici non è detto che due punti distinti in uno psazio topologico abbiano due ripesttivi intorni disgiunti; *e.g.* se come famiglia di aperti in $\mathbf{R}$ si consdierano le semirette illimitate superiormente senza minimo si ha una topologia che no gode di questa proprietà di separazione.
Definizione Uno spazio topologico si dice di Hausdorff se e solo se due punti distinti hanno due intorni ripsettivi disgiunti.
Questo comporta in particolare che gli inisemi fatti da un sol punto, e quindi tutti gli inisemi finiti, siano chiusi.
-Quindi un punto si dirà isolato in uno spazio topologico se l'insieme che lo ha come unico elemento è aperto.
Un punto $x \in X$ si dice di accumulazione per un sottoinsieme C se in ogni suo intorno vi è un punto di C diverso dallo stesso x
Un punto non isolato è un punto per cui ogni suo intorno ha elementi dello spazio diversi da lui, e quindi è un punto di accumulazione per lo spazio stesso.
- La frontiera ∂C di un sottoinsieme C di uno spazio topologico X sarà l'insieme dei punti di X percui ogni loro intorno interseca sia C che $X \setminus C$.
Il complementrae della frontiera è ovviamento aperto e quindi la frontiera è un chiuso.
- Una funzione tra due spazi topologici X e Y si dice che ha limite eguale ad l in $x \in X$ di accumulazione se per ogni intorno V di l in Y vi è un intorno u di x in X per cui $f(U \setminus \{x\}) \subseteq V$. I limiti di successioni si possono considerare come limiti di funzioni su $\mathbf{N}$ con la topologia relativa delle semirette illimitate superiormente.
- Una funzione è continua in ogni punto se esolo se la preimmagine di una aperto è un aperto se e solo se la preimmagine di un chiuso è un chiuso.
in spazi metrci la chiusura equivale alla chiusura per successioni. Ciò non accade negli spazi topologici generici: un chiuso sarà chiuso per successioni ma non viceversa
quindi la continuità per successioni non equivale alla continuità in ambito non metrico
analogamente la compattezza per successioni non equivale alla compattezza. Si ha senz'altro che se
c) Toplogia prodotto: si consideri una famiglia di spazi topologici $(X_\lambda, \mathcal{A}_\lambda)$ $\lambda \in \Lambda$ si consideri $\bigotimes_\lambda X_\lambda =: \{f : \lambda \to \bigcup_\lambda X_\lambda : f(\lambda) \in X_\lambda\}$ (*e.g.* $\mathbf{R}^M = \mathbf{R}^{\{1,\dots M\}}$).
Su tale insieme si definisce una topologia dicendo che un insieme A è aperto se per ogni suo punto f vi sono un numero finito di indici $\lambda_1 \dots \lambda_n$ e aperti nei rispettivi spazi topologici per cui $f(\lambda_1) \in A_{\lambda_1} \dots f(\lambda_n) \in A_{\lambda_n}$ e $\bigotimes_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda \bigotimes_i A_{\lambda_i} \subseteq A$
Questa topologia prodotto è la topologia più piccola, rispetto all'inclusione, che rende continue tutte le proiezioni: in effetti la preimmagine di un aperto A_γ di X_γ è $\bigotimes_{\lambda \neq \gamma} \otimes A_\gamma$. Per questo carattere di finitezza nonmeraviglia che valga il seguente teorema:
Teorema Prodotto di spazi topologici compatti è compatto.