Complementi di Analisi Matematica,
Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi
dal 28 febbraio al 9 marzo 2006

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 Si considerino i luoghi dei punti di $\mathbf{R}^2$ descritti dalle seguenti equazioni:

(i)	$x^2+y^2-1=0,$	(v)	$x^2+y^2+xy=0,$
(ii)	$x^2+y^2=0,$	(vi)	$x^2-y^2=0,$
(iii)	$x^2+y^2+1=0,$	(vii)	$x^2+y^2+2x+2y+2=0,$
(iv)	$x^2+y^2+2xy=0,$	(viii)	$(x^2-1)^2+y^2=0,$

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

(a)	nessun punto,	(d)	una retta,
(b)	un punto,	(e)	due rette,
(c)	due punti,	(f)	una circonferenza.

ESERCIZIO n. 2 Riconoscere che tipo di coniche definiscono rispettivamente i seguenti luoghi di zeri:
$x^2+y^2+2xy=0$, $xy=1$, $(x-y)^2=(x+y)^2$, $x^2+y^2-6xy-x+4=0$, $xy-23y+8y-1=0$, $3x^2+2y^2-3xy+x+y-100=0$.

ESERCIZIO n. 3 Verificare che:
- un ellisse è il luogo dei punti con somma delle distanze da due punti fissi costante;
- un iperbole è il luogo dei punti con differenza delle distanze da due punti fissi costante;
- una parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa e da un punto fisso.

OSSERVAZIONE si può verificare dando la nozione di tangenza che se una retta interseca una conica non degenere in un sol punto è ad essa tangente in quel punto.
DEFINIZIONE - Si dice cammino di riflessione rispetto ad una retta per un suo punto l'unione di due semirette (lati) con origine nel punto e simmetriche rispetto all'asse perpendicolare alla retta nel punto.
- Un cammino di riflessione rispetto ad un insieme in un suo punto è un cammino di riflessione rispetto all'eventuale retta tangente all'insieme dato in questo suo punto.

ESERCIZIO n. 4 Verificare che:
- i cammini di riflessione rispetto ad una parabola con un lato parallelo all'asse della stessa hanno l'altro che passa per il fuoco della parabola;
- i cammini di riflessione rispetto ad un'elisse che hanno un lato che passa per un fuoco hanno il secondo lato che passa per l'altro fuoco;
- i cammini di riflessione rispetto ad un iperbole che hanno un lato passante per un fuoco hanno prolungamento del secondo lato passante per l'altro fuoco.

ESERCIZIO n. 5 Si consideri la funzione $(A, B) \mapsto \text{traccia} A\overline{B}$ definita sulle coppie di matrici complesse di dimensione n. Si mostri che da un prodotto scalare complesso sul sottospazio delle matrici Hermitiane.

ESERCIZIO n. 6 Si trovi la forma canonica di Jordan reale della matrice con colonne $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO n. 7 Date due matirci A e B di dimensioni rispettive $n \times h$ e $k \times k$ si consideri la funzione $X \mapsto \det AXB$ definita sulle matrici $h \times k$. Si provi che è multilineare alternante nelle colonne e la si esprima in funzione dei determinanti dei minori.

ESERCIZIO n. 8 Si provi per induzione che il coefficiente di grado $n - k$ di un polinomio monico di grado n è

$(-1)^{n-k} \sum_\sigma \lambda_{\sigma_1} \ldots \lambda_{\sigma_k}$,

ove la sommatoria è estesa alle funzioni *non decrescenti* da $\{1 \ldots k\}$ a $\{1 \ldots n\}$ e λ_j, $1 \leq j \leq n$ è una numerazione non decrescente con molteplicità delle radici del polinomio.

ESERCIZIO n. 9 - Si provi, per esempio usando il risultato dell'esercizio 7, che la somma dei determinanti delle sottomatrici $k \times k$ che hanno la diagonale in comune con la matrice principale $n \times n$ è invariantte per cambiamenti di coordinate.

- Si scrivano i coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ in termini di determinanti.

ESERCIZIO n.10 - Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1, 2)$, $(6, 7)$, $(-1, 3)$.
- Si calcoli il volume del parallelepipedo nello spazio di vertici $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$, $(5, 5, 5)$.
- Si determini l'area del triangolo con vertici l'origine, $(1, 1, 1)$ e la proiezione ortogonale di questo sul piano per l'origine e i punti $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 1)$.
- Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$

ESERCIZIO n. 11 - Si provi che i quattro punti $(1, 1, 1)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 4, 3)$ giacciono su uno stesso piano.
- Si calcolino le aree dei tre parallelogrammi ottenuti proiettando ortogonalmente sui piani coordinati il parallelogramma, nello spazio, di vertici $(1, 1, 1)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$, $(4, 4, 3)$.
- Si verifichi che la radice quadrata della somma dei quadrati delle precedenti aree è eguale all'area del parallelogramma nello spazio.

ESERCIZIO n. 12 Si cacloli la dimensione dello spazio delle forme 3-lineari alternanti in $\mathbf{R}^5$ che si annullanno sulla terna $(1, 0, 0, 0, 0)$,$(0, 0, 1, 0, 0)$,$(0, 0, 0, 1)$.

ESERCIZIO n. 13 [k-covettori in $\mathbf{R}^n$] Siano $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, rispettivamente $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$, gli elementi della base standard di $\mathbf{R}^n$ e della base standard del duale di $\mathbf{R}^n$, lo spazio delle funzioni reali lineari di n variabili. Date le funzioni reali lineari $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ su $\mathbf{R}^n$ si definisce la seguente forma k-lineare $\langle \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k; u^1, \ldots, u^k \rangle = \langle \varphi_1; u^1 \rangle \ldots \langle \varphi_k; u^k \rangle$.

Si definisce la k-forma lineare alternante $\mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$, come quella che dati k vettori, $v_1 \ldots v_k$, considerati come colonne di una matrice associa loro il determinante della matrice ottenuta selezionando le k righe $i_1, \ldots i_k$.

- Si provi che $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, $0 \leq i \neq j \leq n$ sono linearmente indipendenti e formano una base dello spazio vettoriale delle forme bilineari su $\mathbf{R}^n$.
- Si provi dunque che $\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i$, $0 \leq i < j \leq n$, e formano una base dello spazio delle 2-forme lineari alternanti $\Lambda^2 \mathbf{R}^n$.
- Si calcoli la dimensione dello spazio delle k forme lineari (o k-covettori) alternanti su $\mathbf{R}^n$.
- Date la k forma alternante $\alpha = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$, e la r forma $\beta = \sum\limits_{j_1<\ldots<j_r} b_{j_1\ldots j_k} \mathbf{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{j_r}$, si definisce la $k+r$ forma *prodotto esetrno* $\alpha \wedge \beta = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} a_{i_1\ldots i_k} b_{j_1\ldots j_k} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \wedge \mathbf{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{j_r}$
Si mostri che tale notazione è coerente con quella introdotta per i covettori elementari. Si mostri che tale prodotto è associativo, lineare in ogni variabile, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kr} \beta \wedge \alpha$, e che per l'iterazione su funzioni lineari vale la formula $f_1 \wedge \ldots \wedge f_r(v_1 \ldots v_r) = \det\{f_i(v_j)\}_{i,j}$
- Semplificare l'espressione $(\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 + 3\mathbf{e}^3) \wedge (\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 - 3\mathbf{e}^3) \wedge \mathbf{e}^4$.
- Calcolare: $\langle (\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3) \wedge (\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^3); ((4,2,1,3),(1,1,1,1),(1,0,1,0)) \rangle$

ESERCIZIO n. 14 [k-vettori e k-covettori in $\mathbf{R}^n$] - Grazie al prodotto scalare euclideo si identifichino i vettori di $\mathbf{R}^3$ con le funzioni lineari reali.

Se $(a,b,c) \wedge (A,B,C) = \alpha \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 - \beta \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + \gamma \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2$ si provi che $(\alpha,\beta,\gamma) \bullet (x,y,z) = \det((x,y,z),(a,b,c),(A,B,C))$. Quindi (α,β,γ) è ortogonale ai vettori dati, il suo modulo è l'area del parallelogramma da essi generato, e la base ordinata $((\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c),(A,B,C))$ è orientata positivamente.

ESERCIZIO n. 15 [k-vettori]- Grazie al prodotto scalare euclideo si identifichino i vettori di $\mathbf{R}^3$ con le funzioni lineari reali. Si provi che due coppie ordinate di vettori (U,V) e (S,T) definiscono lo stesso sottospazio bidimensionale, hanno la stessa orientazione relativa, e danno parallelogrammi di egual area, se e solo se come funzioni lineari si ha $U \wedge V = S \wedge T$
- Si possono definire i k-vettori elementari $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ in modo forte come lo spazio le classi di equivalenza di $k-ple$ di vettori $(v_1, dotsv_k)$ che danno lo stesso risultato per ogni k-forma lineare alternante. Lo spazio vettoriale astratto generato dai k-vettori elementari si dice spazio dei k-vettori. Si mostri che in dimensione finita le k-forme lineari alternanti sul duale di $\mathbf{R}^n$ sono identificate con iu k-vettori.

ESERCIZIO n. 16 - Si provi che per $n \leq 3$ tutti i 2-vettori sono della forma $u \wedge v$. In generale tutti gli $n-1$-vettori sono della forma $u^1 \wedge \ldots \wedge u^{n-1}$.
- Dire quali tra seguenti 2-vettori possono essere scritti nella forma $v \wedge w$ $(n=5)$:
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5$
