Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2003-2004
Laurea specialistica in Informatica
R.Stasi, V.M. Tortorelli

IV foglio di esercizi
dal 17 marzo 2004 al 24 marzo

ESERCIZIO n. 1 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}$, $y - x^2 = 0$; $f(x,y) = \sin((x-2)^2 + y^2)$, $(1-x)^3 + y^2 = 0$;

$f(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2$, $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}$;

$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$, $\frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1$;

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 , \quad \begin{cases} (z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0 \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} ;$$

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y-\varepsilon)^2 + z , \quad \begin{cases} (1-x)z = (1+x)y \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} ;$$

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|, |z+4|\} = 1$;

$$f(x,y,z,w) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{w^2}{4}, \quad \begin{cases} (x+y+z+w)^2 + (x-y+z-w)^2 = 1 \\ (x-y-z+w)^2 + (x-y-z-w)^2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 2
a) - Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

- $(*)$ Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
(Si consideri x_0 punto di massimo su $\bar{\Omega}$ di u, $\max_\Omega u - \delta \geq \max_{\partial\Omega} u$, ε per cui $\varepsilon dist(x_0, \partial\Omega)^2 = \varepsilon \min_{\partial\Omega} |x_0 - x|^2 \leq \delta$ e quindi e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)

- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

b) - Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi é *al piú una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) \ = \ f(x) & x \in \Omega \\ u(x) \ = \ g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- $(*)$ Si provi che per l' eventuale soluzione si ha: $\max_{\overline{\Omega}} |u| \ \leq \ \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|$.

NOTA: Si puó provare: - se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ lo assume *solo* sul $\partial\Omega$ o u é costante.

- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, e u non è costante, allora non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω.

ESERCIZIO n. 3 Utilizzando l'unicità della soluzione provata nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) \ = \ 0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y) \ = \ \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2+y^2=1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2+y^2<1\} \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle u(x,y) \ = \ 0 & \max\{|x|,|y|\}<\pi \\ u(x,y) \ = \ \sin x \cos y & \max\{|x|,|y|\}=\pi \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|,|y|\}<\pi\} \end{cases}$$

NOTA: Si cerchi una funzione del tipo $\varphi(y) \sin x$.

ESERCIZIO n. 4

a) Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremale interno a Ω. Nel caso si tratterebbe di un massimo o di un minimo?

b) Utilizzando il fatto che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 5 Si disegnino sommariamente e si descrivano come cammini parametrici gli insiemi definiti dalle seguenti condizioni: $x^2 - y = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 - y^3 = 0$, $dist((x,y),(1,0))dist((x,y)(-1,0)) = 1$ (elevare al quadrato, semplificare ed usare coordinate polari), $(*)$ $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

ESERCIZIO n. 6 Si descriva l'immagine dei seguenti cammini: $(t\cos t, t\sin t)$, $t \mapsto (t\cos\frac{1}{t}, t\sin\frac{1}{t})$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

ESERCIZIO n.7 Si esprimano come immagini di superficie parametriche i seguenti insiemi $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 3z^2 = 1\}$, $\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 : \ x^2 + y^2 = 1, \ z^2 + w^2 = 1\}$.

ESERCIZIO n.8 Si descriva in forma parametrica la superficie di rivoluzione attorno all'asse delle z di una cmmino nel semipiano $y = 0, \ x > 0$.

ESERCIZIO n.9 a) Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'elissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

b) Trovare l'elissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume massimo per cui $a + b + c = M$, $a, \ b, \ c > 0$.

c) Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}$.

(*) ESERCIZIO n. 10 È vero che il minimo valore di $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x-R)^2 + (y-R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n.11 Dato un vettore $x = (x_1, \dots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare:

a) Il vettore che massimizza H.
b) Il vettore che massimizza H sotto il vincolo $\sum_{i=1}^n x_i y_i = c$, dove $y = (y_1, \dots y_n)$ è un vettore qualsiasi.

ESERCIZIO n.12 In un mercato duopolistico ci sono n aziende che producono lo stesso bene, ognuna in quantità y_i. Il prezzo p del bene dipende dalla quantità totale prodotta $\sum_{i=1}^n y_i$. Ogni azienda decide di produrre la quantità y_i che massimizza il proprio profitto:

$$f_i(y_i) = p\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) y_i - cy$$

dove c è il costo unitario di produzione del bene.
Determinare in quali condizioni il mercato è in equilibrio (ogni azienda, cioè, non intende modificare la propria produzione y_i).
Dimostrare che per $n \to \infty$ il prezzo di equilibrio p converge a c.

ESERCIZIO n.13 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$, e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \text{tr } A$. Si dimostri che esiste un solo punto di massimo e un solo punto di minimo e si calcolino il massimo e il minimo di f.

ESERCIZIO n.14 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.
a) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $]-1;1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t = 0$.
b) Se $\Sigma = \{detA = 1\}$ si provi che i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $\text{tr } A^{-1}X = 0$.
c) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri che il gradiente di f in A, se $f(A) \neq 0$, è dato da:

$$\nabla f(A) = \det A \, ({}^tA)^{-1},$$

dove ${}^tA$ indica la trasposta di A.

ESERCIZIO n.15
a) Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:

$$x^3y - y^3x = a^2 \ , \quad \sin xy - e^{xy} - x^2y = 0 \ , \quad x^y = y^x \ .$$

b) Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 : \ \frac{\partial z}{\partial x} \ ; \quad z^3 + 3xyz = a^3 : \ \frac{\partial z}{\partial x} \ ; \quad e^z - xy^2z = 0 : \ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

ESERCIZIO n.16

a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini le regioni ove il differenziale è invertibile e quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

b) Identificando il piano complesso $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$, $z=x+iy\sim(x,y)$, si considerino $f(z)=z^n$, $n\in\mathbf{N}$ e $g(z)=e^z$ come funzioni di due variabili. Se ne studino le immagini e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{w\}$, $g^{-1}\{w\}$. Si determini le regioni ove i differenziali sono invertibili e quindi le regioni ove le funzioni sono invertibili.

ESERCIZIO n.17

a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2}{y}$, $g(x,y)=\binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini. Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.

b) Sia $f(x,y)=\binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y}=(u,v)$, $k\in\mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$. Si determini un intorno di $(x,y)=(0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}(0,0)$.

c) Sia $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=\binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f=(0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3) e si calcoli $\frac{\partial x_1}{\partial y_2}(3,2,7)$. É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto di $\{f=(0,0)\}$?

ESERCIZIO n.18

a) Sia $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{xy}=(u,v)$: si trovi un intorno di $P_0=(1,1)$ in cui f é iniettiva.

b) Si determini lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, centrato in $U_0=(0,1)=f(1,1)$, dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

(*) c) Dato U si consideri la successione di vettori $P_{n+1}=df^{-1}(U_0)(U-f(P_n))+P_n=:G(P_n)$. Si trovino α e δ per cui se $|U-U_0|\le\alpha$ la funzione G risulti una contrazione della palla chiusa di centro P_0 e raggio δ in se stessa. Si calcoli per tali U il limite di $f(P_n)$ per $n\to\infty$. Si calcoli P_2 nel caso in esame.