

Matematica, Anno Accademico 2009-2010, Biotecnologie

V.M. Tortorelli

Esercizi su equazioni differenziali

ESERCIZIO n. 1 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}u' + 2u &= 4x, \quad u' + u = \cos x, \quad u' + au = e^{mx}, \quad u' - u \sin x = \sin 2x, \quad u' + 2xu = xe^{-x^2}, \\u' + \frac{1-2x}{x^2}u &= 1 \quad (x > 0), \quad u' - u = \frac{(1+x^2)e^x}{x} \quad (x < 0), \quad u' - \frac{2xu}{1+x^2} = 1 + x^2, \\u' + \frac{2}{x}u &= \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0), \quad u' + \frac{nu}{x+1} = e^x(x+1)^n \quad (n \in \mathbf{N}), \\xu' &= 1, \quad xu' + 2u = \sin x, \quad x(u' - u) = (1+x^2)e^x, \quad (x+1)u' - nu = e^x(x+1)^{n+1}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 2 Data un'equazione differenziale $u' = f(x, u)$ l'eventuale inversa di una soluzione dovrebbe verificare l'equazione $x' = \frac{1}{f(x, u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u' = \frac{1}{2x - u}, \quad u(1) = 1; \quad u' = \frac{1}{2x - u^2}, \quad u(1) = -1; \quad u' = \frac{1}{x + e^u}, \quad u(0) = 3;$$

ESERCIZIO n. 3

a) Un massa puntiforme di grandezza m , in quiete all'istante iniziale t_0 , si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ , all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo proporzionale, per un fattore χ , alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.

b) Un corpo ad un istante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0 . Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2 , e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2 , alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

ESERCIZIO n. 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$u' = \frac{1-2x}{u^2}, \quad xu' + u = u^2 \quad (x > 0), \quad u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-x^2}} = 0, \quad u' = \frac{1+u^2}{1+x^2}, \quad u' = 100^{x+u}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per *sostituzione*:

$$u' = 3 + \cos(x - u), \quad u' = \frac{u+x-1}{(x+u)^2+1}, \quad u' = \frac{6x + \frac{u}{x}}{2 - \log x}, \quad u' = -\frac{e^x \cos u + 3u}{3 - e^x \sin u}.$$

(*) ESERCIZIO n.6 Trovare un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto.

ESERCIZIO n. 7 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{aligned}u'' &= x + \sin x, \quad u'' = \operatorname{artan} x, \quad u'' = u' + x, \quad u'' = \frac{u'}{x} + x, \quad (u'')^2 = u', \quad 2xu'u'' = (u')^2 + 1, \\u'' &= u, \quad u'' = u^{13}, \quad u'' = 2uu', \quad u''u + (u')^2 = x, \quad u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0, \quad u'' + u', \quad u'' = \frac{u'(e^u - 1)}{x}, \\u'' &= \frac{u}{1 + (u')^2}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 8 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$u'' = \frac{2xu'}{1+x^2}, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 3; \quad u'' = \frac{u'}{x} + \frac{x}{u'}, \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = 1;$$

$$u'' = xu' + u + 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

ESERCIZIO n.9 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti o la soluzione dei problemi ai dati iniziali:

$$u'' - 2u' + u = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = e; \quad u'' - 3u' + 2u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0;$$

$$u'' + u' - 2u = 0; \quad 4u'' - 20u' + 25u = 0; \quad u'' - 4u' + 3u = 0, \quad u(0) = 6, \quad u'(0) = 10.$$

ESERCIZIO n.10 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:

$$u'' - 3u' + 2u = x^2; \quad u'' + 2u' + 10u = x^3 - 1; \quad 2u'' + u' - u = 2e^x; \quad u'' + 2u' + 5u = \sin x;$$

$$u'' - 3u' + 2u = f(x) \text{ nei seguenti casi:}$$

$$10e^{-x}, \quad 3e^{2x}, \quad 2 \sin x, \quad 2x^3 - 30, \quad 3x + 5 \sin 2x, \quad 2e^x - e^{-2x}, \quad \sinh x;$$

$$u'' + u = \frac{1}{\cos x};$$

$$u'' + u = \sin 2x, \quad x \in [0; \pi], \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

ESERCIZIO n.11 Se $y \neq 0$ è soluzione di: $u''(x) + u'(x)f(x) + u(x)g(x) = 0$, allora

$$z(x) = cy(x) \int \frac{e^{-\int^t f(s)ds}}{y^2(t)} dt$$

sono soluzioni della stessa equazione non multiple di $y(x)$ [variazione delle costanti].

ESERCIZIO n.12 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan x \cdot u' + 2u = 0, \quad u'' - u' + \frac{u}{x} = 0.$$

(*) ESERCIZIO n.13 Si trovino tutte le soluzioni $(u; \lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0; \pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$$u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi) = 0; \quad u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi);$$

$$u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi); \quad u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0.$$