Matematica, Anno Accademico 2009-2010,
Biotecnologie
RUDIMENTI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI: V.M. Tortorelli
29 aprile 2010

Equazioni di base

"Quadratura" semplice Se $f : A \to \mathbf{R}$ è continua su A intervallo in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in A \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Variabili separabili Se $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su A e su B, intervalli in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare gli I intervalli inclusi in A, e le funzioni $y \in C^1(I)$, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

- Si cercano gli intervalli I e le soluzioni $y(t)$ che non annullano g: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$

i- Per prima cosa si considera un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che g si annulli solo agli estremi di$J$,

ii-una generica Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su J, $\Gamma(p) = \displaystyle\int^{p} \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$ l'equazione diventa $\boxed{\frac{d\Gamma(y(t))}{dt} = f(t),}$

iii-una generica primitiva F di f su A, $F(t) = \displaystyle\int^{t} f(s)ds$ l'equazione diventa $\boxed{\frac{d\Gamma(y(t))}{dt} = \frac{dF(t)}{dt},}$

iv- *si determinano di conseguenza* I e $c \in \mathbf{R}$ t.c. $Im_I(F + c) \subseteq Im_J\Gamma$ = intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$,

si ha integrando che l'equazione è equivalente a $\boxed{\Gamma(y(t)) = F(t) + c,\ t \in I}$

cioè, poichè $g = \Gamma'$ è continua non cambia segno Γ sarà invertibile su J intervallo $\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$

v- Quindi: tutte le soluzioni che non annullano g sono del tipo trovato. Viceversa l'ultima formula da una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta$, $t \in I$.

Se si disegna l'insieme definito da $\boxed{\Gamma(p) - F(t) = c, (t, p) \in I \times \Gamma}$ si ha il grafico della soluzione individuata.

<u>*Problema di Cauchy 1:*</u> Se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale ($I \neq A$) al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende J in modo che $y_0 \in J$ e g non si annulli se non agli estremi di J, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^{p} \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$ ($\Gamma(y_0) = 0$)

- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, I per cui $\boxed{t_0 \in I \text{ e } Im_I F \subset Im_J\Gamma}$ ($c = 0$)

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t))$ è ben definita ed è soluzione, e tale y è a *valori in* J: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla* g: $\tilde{\Gamma}(\tilde{y}(t)) = \tilde{F}(t) \Rightarrow \tilde{\Gamma}(y_0) = \tilde{F}(t_0)$ e $\tilde{\Gamma}(p) = \Gamma(p) + \tilde{\Gamma}(y_0)$, $\tilde{F}(t) = F(t) + \tilde{F}(t_0)$ quindi $\Gamma(\tilde{y}(t)) = F(t)$.

(<u>*Problema di Cauchy 2:*</u> Se $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la soluzione trovata è globale $I = A$ e non annulla g se non agli estremi di A: se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad α o a β da cui $\int_{t_0}^{t_1} f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma f *continua* ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi $\subset A$.

<u>*Problema di Cauchy 3:*</u> Analogamente se y_0 è uno *zero isolato* di g e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a y_0 è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.

<u>*Condizione di Lipschitz*</u> Una classica condizione per cui ciò accada è che esista un numero L per cui

$$|g(p) - g(q)| \leq L|p - q|.$$

In altre parole g abbia i *rapporti incrementali limitati*: quindi se derivabile essendo definita su un intervallo basta che g' *sia limitata*)

Equazioni lineari del primo ordine $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con f e a funzioni continue su un intervallo I.

Omogenea $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è dato da $u(t) = e^{\alpha(t)} \cdot c$.

Soluzioni Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le *sole* soluzioni sono date

$$\boxed{y(t) = e^{\alpha(t)} \cdot c + \cdot \int^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} \cdot f(s)ds = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \cdot y_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s a(x)dx} \cdot f(s)ds}$$

[formula di semigruppo, sovrapposizione di un continuo (integrale) di effetti: il termine noto diventa dato iniziale ad ogni istante s per l'equazione omogenea associata , la $u_s(t) = e^{\alpha(t)-\alpha(s)}f(s)$ è la soluzione dell'omogenea che all'istante s vale $f(s)$]

Si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea [sovrapposizione di due (somma) effetti].

Equazioni lineari del secondo ordine

Schema astratto Se V, W sono spazi vettoriali, e $A : V \to W$ è una funzione lineare allora:

i- L'insieme delle $u \in V$ soluzioni $A(u) = \mathbf{O}_W$ (equazione omogenea con termine noto nullo) è un sottospazio vettoriale di V (eventualmente quello fatto solo dalla soluzione banale $\mathbf{O}_V$)

Intuitivamente si può pensare che questo insieme di soluzioni sia un "iperpiano" passante per l'origine.

$(A(u_1) = \mathbf{O}_W,\ A(u_2) = \mathbf{O}_W \Rightarrow A(u_1 + zu_2) = A(u_1) + zA(u_2) = \mathbf{O}_W)$

ii- Dato $w \in W$ *se* viè $v^* \in V$ è *soluzione particolare* di $A(v^*) = w$ (equazione non omogena con termine noto w) allora *tutte e sole* le soluzioni di $A(v) = w$ solo le $v \in V$ del tipo $\boxed{v = v^* + u}$ per qualche u soluzione dell'omogenea [sovrapposizione di due effetti].

Intuitivamente le soluzioni della non omogenea (se ve ne sono) costituiscano un "iperpiano" generico.

$(v = v - v^* + v^*,\ A(v) = w \Leftrightarrow A(v - v^*) = A(v) - A(v^*) = w - w = \mathbf{O}_W)$

Implementazione nel caso di interesse Sia I un intervallo,

- $V = C^2(I)$ insieme delle funzioni due volte derivabili con derivata seconda continua su I: è uno spazio vettoriale
- $W = C(I)$ insieme delle funzioni continue su I: è uno spazio vettoriale
- siano $a(t),\ b(t),\ c(t)$ delle funzioni continue su I e per $v \in C^2(I)$

sia $A(v)(t) = a(t)v''(t)\ +\ b(t)v'(t)\ +\ c(t)v(t)$

$v \mapsto A(v)$ è una *funzione lineare* da $C^2(I)$ in $C(I)$ che trasforma funzioni due volte derivabili con continuità in funzioni continue (la derivazione è lineare, la moltplicazione valore per valore per una data funzione è distributiva e commutativa, e somma di funzioni lineari è lineare)

- sia $t \mapsto f(t) = w$ una funzione continua "termine noto"

Le proprietà astratte i- e ii- permettono di dedurre immediatamente le proprietà 1 e 4 del seguente teorema fondamentale

Teorema 1 Si consideri l'equazione lineare nell'incognita $y(t)$: $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$, con coefficienti e termine noto funzioni continue su un intervallo I con $a(t) \neq 0$ e valori in $\mathbf{R}$ [risp. $\mathbf{C}$].

1- L'insieme delle soluzioni dell'equazione con termine noto nullo (equazionee omogenea associata) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ [risp. su $\mathbf{C}$] ovvero: somma e prodotto per numero di soluzioni è soluzione.

2- tale spazio ha dimensione 2 ovvero:

- *comunque* trovate due soluzoni dell'omogenea $u_1(t)$ e $u_2(t)$ che non siano una "multiplo dell'altra" (*linearmente indipendenti*) ogni altra soluzione è del tipo $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ con c_1, c_2 costanti reali [risp. complesse], (la soluzione generale dell'omogenea dipende solo da due parametri)
- e vi è una coppia di soluzioni indipendenti.

3- Vi è almeno una soluzione dell'equazione $v^*(t)$.

4- Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo $v^*(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$.

Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

1- si determinano due soluzioni dell'omogena $(u_1(t), u_2(t))$ indipendenti

2- si trova una soluzione particolare $v^*(t)$

3- si cercano c_1, c_2 per cui $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + v^*(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema.

Passo 1 nel caso di coefficienti costanti
Il caso elementare per trovare soluzioni è quello in cui i coeffcienti sono funzioni *costanti.*

Teorema 2. Si consideri l'equazione lineare omogenea nell'incognita $u(t)$: $au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$, con coefficienti costanti. Se i coefficienti sono reali si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$u(t) = \begin{cases} c_1 e^{t\alpha} \cos\beta t + c_2 e^{t\alpha} \sin\beta t \quad \text{ovvero} \quad e^{t\alpha} A \sin(\beta t + \varphi) & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1 e^{t\alpha_1} + c_2 e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \\ c_1 e^{t\alpha} + c_2 \cdot t \cdot e^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

al variare di c_1 e c_2 (A e φ)in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2, α radici di $ax^2 + bx + c = 0$.
Volendo enunciare nel caso complesso il teorema si ha che tutte e sole le soluzioni (questa volta a valori in $\mathbf{C}$) sono del tipo:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_1 e^{\alpha_1 t} + \gamma_2 e^{\alpha_2 t} & b^2 - 4ac \neq 0 \\ \gamma_1 e^{\alpha t} + \gamma_2 \cdot t \cdot e^{\alpha t} & b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

al variare di γ_1 e γ_2 in $\mathbf{C}$, con α_1, α_2, α radici complesse di $ax^2 + bx + c = 0$.
Quindi se a , b, c sono reali si riottiene l'enunciato precedente osservando che in tale ipotesi sui coefficienti $\alpha_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha_2 = \alpha - i\beta$, e che per definizione di forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{i\beta t} + e^{-i\beta t} = 2\cos\beta t, \; ie^{-i\beta t} - ie^{i\beta t} = 2\sin\beta t$$

quindi nel caso di discriminante non nullo negativo con le funzioni trigonometriche si ottengono tutte le soluzioni date delle esponenziali complesse, e usando solo parametri reali si ottengo tutte e sole le soluzioni reali come enunciato in precedenza.

Per ottenere le soluzioni reali usando le esponenziali complesse (che sono coniugate essendo gli esponenti coniugati in quanto radici di un polinomio a coefficienti reali) i parametri γ_1 e γ_2 devono essere scelti coniugati.

Passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare

Per tentativi

Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti
Se il termine noto è $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, con p_1 e p_2 polinomi reali, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m e^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove q_1 e q_2 sono polinomi con gradi minori del massimo di quelli di p_1 e p_2, ed m molteplicità di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinomio associato all'equazione (quindi $m = 0$ se $\alpha \pm i\beta$ non è soluzione del polinomio associato).
Tale metodo è piè semplice da enunciarsi, e da usare, nel caso complesso:
se il termine noto è $p(t)e^{\lambda t}$, con p polinomio, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m \tilde{q}(t) e^{\lambda t}$$

ove $\tilde{q}$ è un polinomio con grado minore eguale a quello di $p(t)$, ed m è la molteplicità di λ come radice del polinomio associato all'equazione: $az^2 + bz + c$.

Variazione delle costanti È la generalizzazione della sovrapposizione di un continuo di effetti. Se $u_1(t)$, $u_2(t)$ sono soluzioni indipendenti dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $u^*(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$.
Imponendo che tale espressione sia soluzione dell'equazione non omogenea e tenendo presente che le u_1 ed u_2 son soluzioni dell'omogenea si ottiene la condizione:

$$a(c_1''u_1 + c_2''u_2 + 2c_1'u_1' + 2c_2'u_2') + b(c_1'u_1 + c_2'u_2) = a[(c_1'u_1 + c_2'u_2)' + (c_1'u_1' + c_2'u_2')] + b(c_1'u_1 + c_2'u_2) = f$$

Essendo un'equazione con due incognite ci sono svariate condizioni per determinare una coppia di funzioni c_1 e c_2 che soddisfino l'equazione (e.g. in certi casi si può tentare di porre una delle due eguale a 0 piuttosto che eguali fra loro ...). La via canonica, anche se in certi casi non la più economica, che garantisce di trovarle sempre si ottiene

- riducendosi al sistema **numerico** (t è fisso) $\begin{cases} u_1 c_1' + u_2 c_2' = 0 \\ u_1' c_1' + u_2' c_2' = \frac{f}{a} \end{cases}$ con incognite i numeri $c_1'(t)$ e $c_2'(t)$

Il sistema è sempre risolubile: ha determinate $W(t)$ dei coefficienti $u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t) \neq 0$ per ogni t.
(Infatti vedendo il determinante come prodotto di due vettori riga $U(t)=(u_1(t),u_2(t))$, $V(t)=(u_1'(t),u_2'(t))=U'(t)$, distributivo rispetto la somma ma anticommutativo si ha come per il prodotto tra numeri $W'(t)=[det(U,V)]'=det(U',V)+det(U,V')=det(U,V')=det(U,U'')=$ usando il fatto che le coordinate di U sono soluzioni dell'omogenea $W'(t)=det(U,-b/aU'-c/aU)=-b/a det(U,U')-c/a det(U,U)=-b/aW(t)$ Quindi $W(t)=e^{-\int^t b/a ds}\cdot c$. Se si annullasse per un istante t dovrebbe essere $c = 0$ e quindi sarebbe $W \equiv 0$ ma allora U ed U' sarebbero sempre allineati con l'origine e per il teorema di Cauchy-Lagrange $t \mapsto U(t)$ desciverebbe una retta per l'origine cioè vi darebbero due numeri A e B per cui $Au_1(t) + Bu_2(t) = 0$ per ogni istante t; cioò non è permesso per ipotesi sulle due soluzioni dell'omogenea che devono essere indipendenti)

- infine se possibile si trovano primitive di c_1', c_2'.