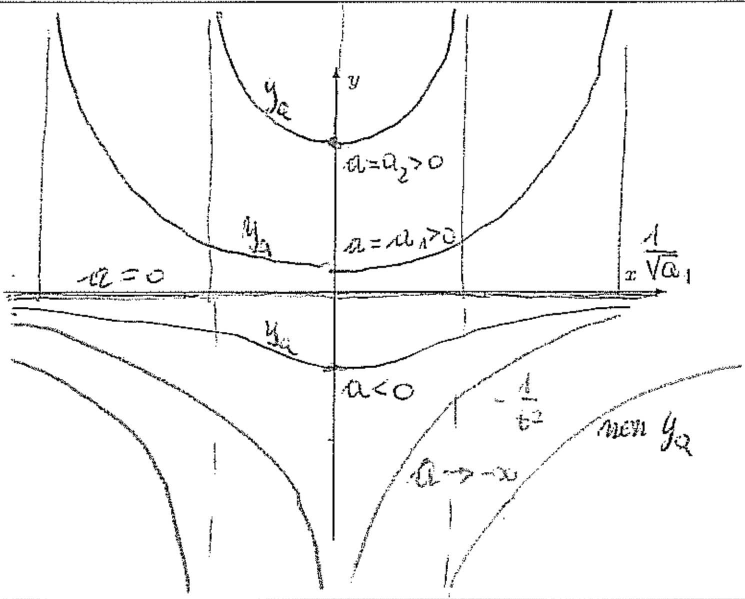
Matematica, Anno Accademico 2009-2010,
Biotecnologie
Vincenzo M. Tortorelli
IV prova in itinere : 27 maggio 2010

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo* con nome e cognome, numero di matricola ed anno di immatricolazione;
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da ⊛;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1a	$1+ce^{-\frac{t^2}{2}}$	1b	$te^{-\frac{t^2}{2}}, de^{-\frac{t^2}{2}}$	1c	$3+7te^{-\frac{t^2}{2}}$
2a	$y(t)=\frac{1}{\frac{1}{a}-t^2}$ DOM $=\mathbb{R}$ $a<0$; $y(t)\equiv 0$ DOM $=\mathbb{R}$	b	$y(t)=\frac{1}{\frac{1}{a}-t^2}$ DOM $=]-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}[$ $a>0$	c	SÌ $a=\frac{7}{25}$
2 d					
3a	$ae^{2t}\cos t+be^{2t}\sin t$	3b	$\frac{t}{2}e^{2t}\sin t+ae^{2t}\cos t+be^{2t}\sin t$	3c	$\frac{t}{2}e^{2t}\sin t$
4a	$p(k)=\begin{cases}5 & k=7\\ k-1 & 2\le k\le 6\\ 13-k & 8\le k\le 12\\ 0 & \text{ALTRIM.}\end{cases}$	4b	$\frac{175}{12}\sim 14{,}583$	4c	48
5a	λ	5b	$\frac{1}{\lambda}$		
6a	$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y-z)\,h(z)\,dz$	6b	$h(x)\,h(y-z)$		

ESERCIZIO n. 1 a- Si trovino tutte le soluzioni $u(t)$ dell'equazione differenziale $y'(t) + t \cdot y(t) = t$

b- Si trovino tutte le soluzioni $v(t)$ dell'equazione differenziale $y'(t) + t \cdot y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

c- Si trovi una soluzione particolare $w(t)$ dell'equazione differenziale $y'(t)+t\cdot y(t) = 3t+7e^{-\frac{t^2}{2}}$

• ESERCIZIO n. 2 a- Per ogni $a \leq 0$ si trovi la soluzione $y_a(t)$ del problema ai dati iniziali $y'(t) = 2ty^2(t)$, $y(0) = a$, e se ne scriva il dominio al variare del parametro $a \leq 0$.

b- Per ogni $a > 0$ si trovi la soluzione $y_a(t)$ del problema ai dati iniziali $y'(t) = 2ty^2(t)$, $y(0) = a$, e se ne scriva il dominio al variare del parametro $a > 0$.

c- La soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione iniziale $y(6) = 7$ è una delle precedenti? Nel caso per che parametro $a \in \mathbf{R}$?

d- Si disegnino indicativamente i diversi andamenti dei grafici di tutte le soluzioni dell'equazione $y'(t) = 2ty^2(t)$.

ESERCIZIO n. 3 a- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0.$$

b- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' - 4u' + 5u = e^{2t}\cos t$.

c- Risolvere il sistema ai dati iniziali $v'' - 4v' + 5v = e^{2t}\cos t \qquad v(0) = 0 \qquad v'(0) = 0$

ESERCIZIO n. 4 a- Lanciando 2 volte un dado non truccato qual'è la funzione di distribuzione di probabilità della somma dei due risultati?

b- Lanciando 5 volte un dado non truccato qual'è la varianza della somma dei risulati?

c- Quanti lanci è sufficiente fare perchè valutando la somma dei risulati con la sua media si abbia con probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$ un errore relativo del 10%?

ESERCIZIO n. 5 a- Dato $\lambda > 0$ per quale $c \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = ce^{-\lambda x} \text{ per } x \geq 0,\ f(x) = 0 \text{ per } x < 0$$

è una densità di probabilità?

b- Si calcoli la media di una variabile aleatoria con tale densità.

• ESERCIZIO n. 6 a- Date due variabili aleatorie X e Z, indipendenti, entrambe con densità eguali ad h calcolare la densità $k(y)$ della variabile $Y = X + Z$.

[Si osservi $\{X + Z \in B\} = \{(X, Z) \in \{(x, z) : x + z \in B\}\}$, e che (X, Z) ha legge nota: si cambi variabile nell'integrale e l' ordine di integrazione]

b- Considerata la variabile vettoriale $V = (X, X + Z)$ calcolare la sua legge di probabilità $L(A \times B) = \mathbf{P}(V \in A \times B)$ e quindi la sua densità $f(x, y)$. [Non è $h(x)k(y)$].

1.a $y'+ty=t \quad e^{t^2/2}y'+e^{t^2/2}ty=e^{t^2/2}t \quad (e^{t^2/2}y)'=(e^{t^2/2})'$

$e^{t^2/2}y=e^{t^2/2}+c \quad u(t)=y(t)=1+ce^{-t^2/2} \quad c\in\mathbb{R}$

1.b $y'+ty=e^{-t^2/2} \quad (e^{t^2/2}y)'=1=(t)' \quad e^{t^2/2}y=t+d$

$v(t)=y(t)=te^{-t^2/2}+de^{-t^2/2}$

1.c Se u è soluzione di $y'+ty=t$, v è soluzione di $y'+ty=e^{-t^2/2}$

$\alpha u+\beta v$ per linearità è soluzione di $y'+ty=\alpha t+\beta e^{-t^2/2}$

quindi per una soluzione particolare di $y'+ty=3t+7e^{-t^2/2}$

basta sommare $3u$ e $7v$ per qualche u, v e.g. $c=d=0$

$w(t)=3+7te^{-t^2/2}$

2.a $\begin{cases} y'(t)=2ty^2(t) \\ y(0)=a\le 0 \end{cases}$ Se $a=0$ l'unica soluzione è $y_0(t)\equiv 0 \quad t\in\mathbb{R}$

Se $a<0$ la corrispondente soluzione per unicità non si può annullare nel suo dominio se no il suo grafico avrebbe un punto in comune con quello di $y_0(t)$.

$a<0 \quad \frac{y'}{y^2}=2t \qquad \left(-\frac{1}{y}\right)'=(t^2)' \qquad -\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{a}=t^2 \quad \left(\int_0^t\right)$

$y_a(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{a}-t^2} \quad <0$ se $a<0$ per ogni t. $\underline{\mathrm{Dom}\, y_a}=\underline{\mathbb{R}}$

2.b Analogamente se $a>0$ poiché $y_a(t)>0$ per ogni $t\in \mathrm{dom}\, y_a$ (non potendosi annullare senza incontrare il grafico di y_0) dovrà essere

$a>0 \quad y_a(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{a}-t^2}>0$ quindi se $a>0$

$\mathrm{dom}\, y_a=\{t : \frac{1}{a}-t^2>0\}=\left]-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right[$

2.c $\begin{cases} y'=2ty^2 \\ y(6)=7 \end{cases}$ Questa volta si integra la relazione $\left(-\frac{1}{y}\right)'=(t^2)'$

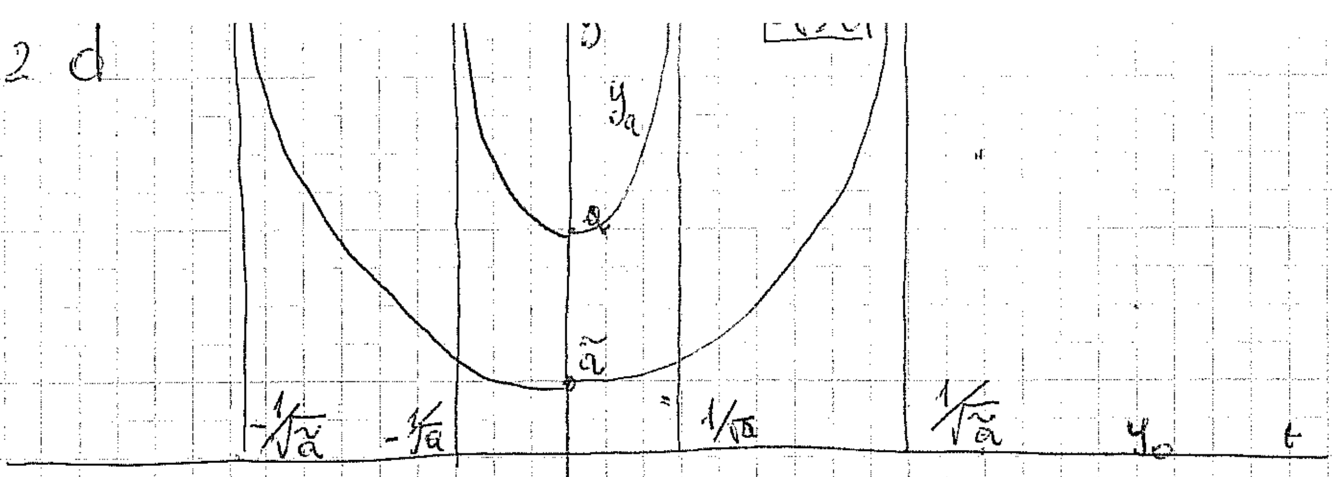
tra 6 e t ottenendo

$-\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{7}=t^2-36$ cioè

$y(t)=\dfrac{1}{\frac{253}{7}-t^2}$ dovendo essere tale $y(t)>0$ poiché $y(6)=7>0$

$y(t)=y_{\frac{7}{253}}(t)$

2 d

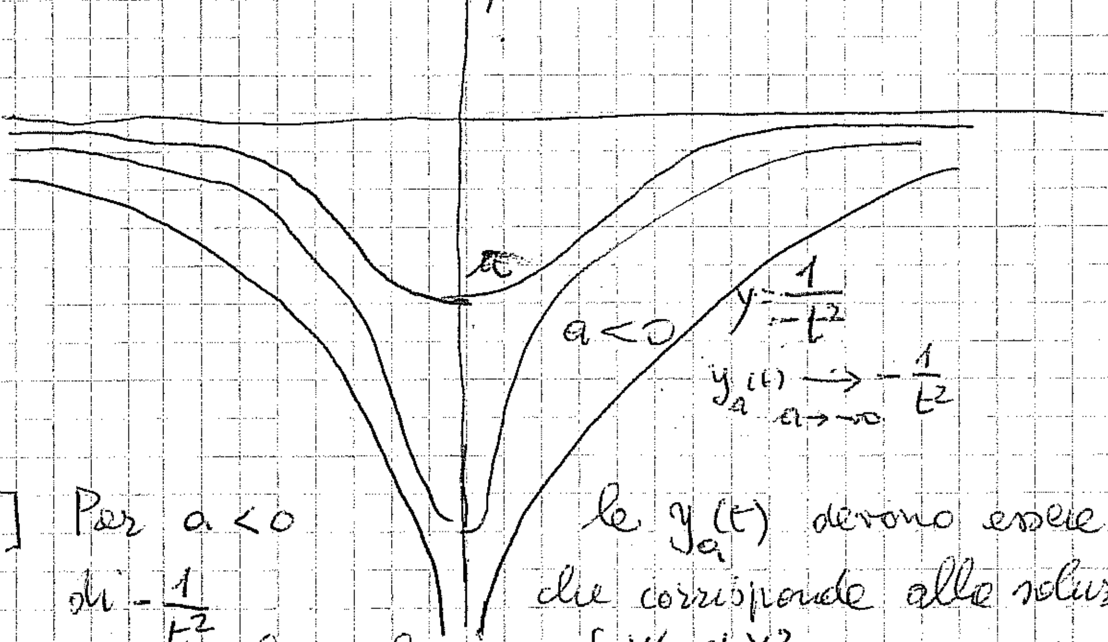


A] Per tutti i punti $\begin{cases}(\bar t, \bar y) \\ \bar y > 0\end{cases}$ passa esattamente un grafico di uno delle y_a con $a > 0$ $\left(a = \frac{1}{\frac{1}{\bar y} + \bar t^2} \right)$

Tali funzioni y_a con $a>0$ hanno derivate

$y_a' = 2t y_a^2$ $\begin{cases} >0 & \text{per } t>0 \\ <0 & \text{per } t<0 \end{cases}$ quindi y_a $\begin{cases} \text{crescente } [0,+\infty[\\ \text{decrescente }]-\infty,0[\end{cases}$

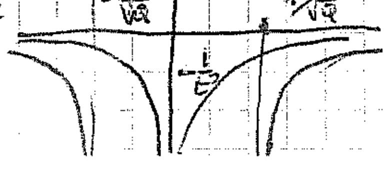
e hanno asintoti verticali in $-\frac{1}{\sqrt a}$, e $\frac{1}{\sqrt a}$



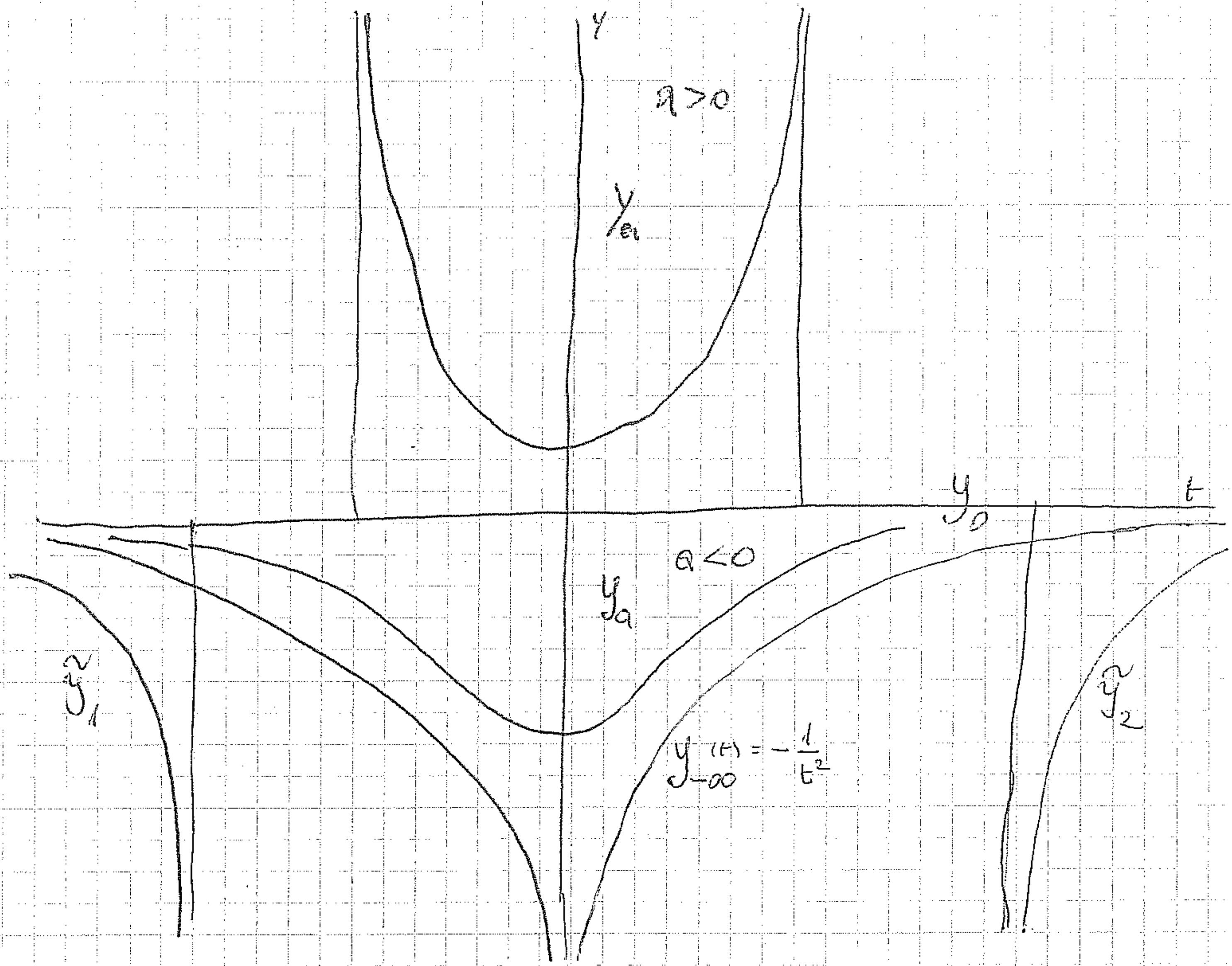
B] Per $a<0$ le $y_a(t)$ devono essere maggiori di $-\frac{1}{t^2}$ che corrisponde alla soluzione $y_{-\infty}(t)$ del problema $\begin{cases} y' = 2ty^2 \\ \lim_{t \to 0} y = -\infty \end{cases}$ (unicità)

Inoltre $y_a \to 0$ per $t \to \pm\infty$; $-\frac{1}{t^2} \le y_a(t) \le 0$

C] Se $\bar y \le -\frac{1}{\bar t^2}$ le soluzioni di $\begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(\bar t) = \bar y \end{cases}$ non sono tra le y_a $a \in \mathbb{R}$. Sono i rami dei grafici delle y_a con $a>0$ scartati perché negativi



Sono soluzioni con DOM $=]-\infty, -\frac{1}{\sqrt a}[$ oppure DOM $=]\frac{1}{\sqrt a}, +\infty[$



y
a>0
y_a
y_0
t
a<0
y_a
$\tilde{y}_1$
$\tilde{y}_2$
$y_{-\infty}(t) = -\frac{1}{t^2}$

3a OMOGENEA $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$

polinomio associato $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

radici $\lambda_1, \lambda_2 \in \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$

soluzioni omogenee $\begin{cases} y(t) = a e^{2t}\cos t + b e^{2t}\sin t \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

3b SOLUZIONE PARTICOLARE $u'' - 4u' + 5u = e^{2t}\cos t$

essendo il termine noto del tipo Polinomio $e^{\beta t}\cos\alpha t$

usando il metodo dei coefficienti indeterminati si cerca una soluzione particolare del tipo:

$p(t) = t^{\mu} \cdot e^{\beta t}(P_1(t)\cos\alpha t + P_2(t)\sin\alpha t)$

P_1, P_2 polinomi di grado $\leq$ grado Polinomio del termine noto

μ molteplicità di $\beta + i\alpha$ come radice di $\lambda^2 - 4\lambda + 5$

NEL CASO P_1 e P_2 hanno grado 0 : sono numeri c, d

$\mu = 1$ $2+i$ è radice

$p(t) = c\,t e^{2t}\cos t + d\,t e^{2t}\sin t = t(c\cos t + d\sin t)e^{2t}$

$= t\tilde{y}$ $\tilde{y}$ soluzione omogenea

Imponendo che p sia soluzione di $y'' - 4y' + 5y = e^{2t}\cos t$

si determinano c e d, $p' = \tilde{y} + t\tilde{y}'$, $p'' = 2\tilde{y}' + t\tilde{y}''$

$p'' - 4p' + 5p = e^{2t}\cos t$ $\quad 2\tilde{y}' + t\tilde{y}'' - 4\tilde{y} - 4t\tilde{y}' + 5t\tilde{y} = e^{2t}\cos t$

somma nulla: $\tilde{y}$ sol. omog.

$2\tilde{y}' - 4\tilde{y} = e^{2t}\cos t$ $\quad 2(ce^{2t}\cos t + de^{2t}\sin t)' - 4ce^{2t}\cos t - 4de^{2t}\sin t = e^{2t}\cos t$

$4ce^{2t}\cos t - 2ce^{2t}\sin t + 4de^{2t}\sin t + 2de^{2t}\cos t - 4ce^{2t}\cos t - 4de^{2t}\sin t = e^{2t}\cos t$

$t=0$	$4c$	0	0	$2d$	$-4c$	0	$=1$
$t=\frac{\pi}{2}$		$-2c$	$+4d$	0	0	$-4d$	$=0$

$\begin{cases} 4c + 2d - 4c = 1 \\ -2c + 4d - 4d = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2d = 1 \\ -2c = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$ $\quad p(t) = \frac{t}{2}e^{2t}\sin t$

SOLUZIONE GENERALE $\begin{cases} u(t) = \frac{t}{2}e^{2t}\sin t + ae^{2t}\cos t + be^{2t}\sin t \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

3.C $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ Si impongono le condizioni $\begin{matrix} u(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}$

$u(0) = a$ $\quad u'(0) = 2a + b$

Per cui $a = 0$ $\quad b = 0$; $v(t) = \frac{t}{2}e^{2t}\sin t$

4a Siano X_1, X_2 i risultati dei due lanci

$$P(X_1 = u \text{ e } X_2 = v) = [\text{INDIPENDENZA}]\ \mathbb{P}(X_1 = u)\mathbb{P}(X_2 = v) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } u \text{ o } v \text{ sono minori di } 1 \text{ o maggiori di } 6 \\ \frac{1}{36} & \text{se } 1 \le u, v \le 6 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = 0 \text{ se } k \le 1 \text{ o } k > 12$$

se $1 \le k \le 12$, $2 \le k \le 12$

$$P(X_1 + X_2 = k) = P((X_1 = 1 \text{ e } X_2 = k-1) \text{ o } (X_1 = 2 \text{ e } X_2 = k-2) \text{ o} \dots)$$

$$= [\text{INCOMPATIBILITÀ}]\ P(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = k-1) + \mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ e } X_2 = k-2) + \dots$$

$$= \sum_u P(X_1 = u \text{ e } X_2 = k-u) = \sum_{\substack{1 \le u \le 36 \\ 1 \le k-u \le 36}} P(X_1 = u)P(X_2 = k-u) =$$

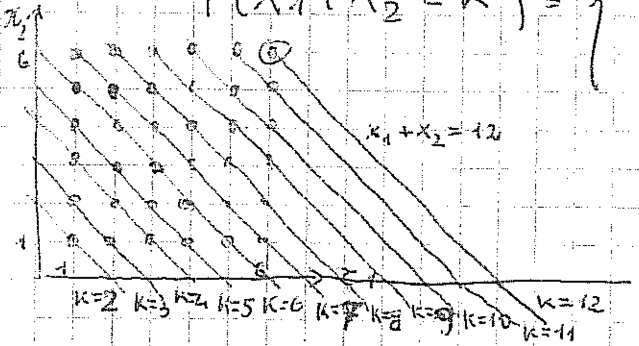
$$= \frac{1}{36} \cdot \#\{u \text{ per cui } 1 \le u \le 36 \text{ e } 1 \le k-u \le 36\} =$$

$$= \frac{1}{36} \#\{u \text{ per cui } 1 \le u \le 36 \text{ e } k-6 \le u \le k-1\} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & 2 \le k \le 7 \\ \frac{13-k}{36} & 7 \le k \le 12 \end{cases}$$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} 0 & k \le 1 \text{ o } k > 12 \\ \frac{k-1}{36} & 2 \le k \le 7 \\ \frac{13-k}{36} & 7 \le k \le 12 \end{cases}$$

Oppure

$$P(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} 0 & k \le 1 \text{ o } k > 12 \\ \dfrac{\#\text{ CASI FAVOREVOLI}}{\#\text{ CASI POSSIBILI}} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & 2 \le k \le 7 \\ \frac{13-k}{36} & 7 \le k \le 12 \end{cases} \end{cases}$$



4b Siano X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 i risultati: sono v.a. indipendenti (1) stessa legge (2)

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots) \overset{(1)}{=} \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots \overset{(2)}{=} 5\,\text{Var}(X_1)$$

$$\langle X_1 \rangle = \sum k\, P(X_1 = k) = \sum_1^6 k \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{VAR}(X_1) = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 = \sum k^2 P(X_1 = k) - \frac{49}{4} =$$

$$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - \frac{49}{4} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

4c $S^n =_{def} X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$P\left(\frac{|S - \langle S \rangle|}{\langle S \rangle} \ge \frac{1}{10}\right) = P\left(\left|\frac{S - n\langle X_1 \rangle}{n\langle X_1 \rangle}\right| \ge \frac{1}{10}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \langle X_1 \rangle\right| \ge \frac{\langle X_1 \rangle}{10}\right) \le$$

$$\le [\text{Tchebychev}]\ \frac{100}{\langle X_1 \rangle^2} \frac{\text{VAR}(X_1)}{n} = \frac{500}{21} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \Leftarrow n \ge \left[\frac{1000}{21} + 1\right] = 48,$$

5.a $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una densità di probabilità se e solo se

i. $f\geq 0$ ii. f è sommabile in $\mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Se $f(x) = c\,e^{-\lambda x}$ $x\in\mathbb{R}^+$ con λ fissato >0
$f(x) = 0$ $x<0$

i. $f\geq 0$ deve essere $c\geq 0$

ii. f è integrabile sui segmenti poiché continua a tratti

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^N c\,e^{-\lambda x}\,dx = c\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= c\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^N = c\lim_{N\to\infty} -\frac{e^{-\lambda N}}{\lambda}+\frac{e^0}{\lambda} =$$

$$= \frac{c}{\lambda}$$ Quindi $c=\lambda$

5.b Sia X per cui $\mathbb{P}(X\in A) = \int_{A\cap[0,+\infty[} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x\,\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda x}\,dx =$$

[PARTI] $$= \lambda\left(\left[x\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)dx\right) =$$

$$= \lambda\left(-0+0+\int_0^{+\infty}\left(+\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)dx\right) =$$

$$= \lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

6.a $\quad Y = X + Z \qquad P(X \in U) = \int_U h(x)dx \quad P(Z \in V) = \int_V h(z)dz$

$P(X+Z \in W) =$

$= P\left((X,Z) \in \{(x,z) : x+z \in W\} \right) =$

ma essendo X e Z indipendenti $\underset{H \subseteq \mathbb{R}^2}{P((X,Z) \in H)} = \iint_H h(x)h(z)dx\,dz$

$$= \iint_{\{(x,z) : x+z \in W\}} h(x)\, h(z) dx\,dz =$$

$x+z \in W \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in W \end{matrix}$

sia $y = x + z$ $\quad x = y - z$

$dx\,dz = dy\,dz$

$$= \iint_{y \in W} h(y-z)h(z)\,dy\,dz =$$

$$= \int_W \left(\int_{\mathbb{R}} h(y-z)\, h(z)\, dz \right) dy$$

quindi la densità di $Y = X + Z$ è

$$k(y) = \int_{\mathbb{R}} h(y-z) h(z) dz$$

6.b $\quad V = (X, Y) = (X, X+Z)$ con analogo procedimento

$\mathbb{P}((X, X+Z) \in U \times W) =$

$\mathbb{P}\left((X,Z) \in \{(x,z) : x \in U \text{ e } x+z \in W\} \right) =$ [X, Z indipendenti

$$= \iint_{\substack{x \in U \\ x+z \in W}} h(x)\, h(z)\, dx\,dz =$$

$y = x + z \qquad z = y - x \qquad (x,z) \in \{x \in U,\ x+z \in W\}$

$dx\,dy = dx\,dz \qquad\qquad \Updownarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in U \times W$

$$= \int_U \left(\int_W h(x)\, h(y-x)\, dy \right) dx = \iint_{U \times W} h(x)\, h(y-x)\, dy\,dx$$

$$f(x,y) = h(x)\, h(y-x)$$