

Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

Soluzione dell'esercizio 16 del II foglio di esercizi

ESERCIZIO n.16 a- Se f è misurabile su M di misura finita allora $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ [Si consideri prima il caso in cui $\|f\|_p < \infty$].

b- Sia M misurabile qualsiasi, se per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$, allora in M $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

c- Se M ha misura 1 e per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$ allora in M $\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp(\int_M \log |f| dm)$.

PREMESSA INTUITIVA: nel caso di una funzione a due valori a, b assunti su insiemi di egual misura: $|f|_p = ((|a|^p + |b|^p) \frac{m(M)}{2})^{\frac{1}{p}} \rightarrow \max\{|a|, |b|\}$ per $p \rightarrow \infty$.

a-b-I Si tratta per primo il caso $|f|_\infty < +\infty$.

a- (Come visto a lezione)

$$m(M)^{\frac{1}{p}} |f|_\infty \geq |f|_p \geq \left(\int_{\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\}} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \geq (|f|_\infty - \varepsilon) m(\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\})^{\frac{1}{p}}$$

l'ultima disuguaglianza è la disuguaglianza di Tschebyshev.

Affinchè quest'ultimo minorante sia utile va dimostrato che $m(\{|f| \geq |f|_\infty - \varepsilon\}) > 0$ e questo è vero per definizione di $|f|_\infty$ (altrimenti l'insieme $\{|f| < |f|_\infty - \varepsilon\}$ avrebbe misura piena e su di esso $\sup |f| < |f|_\infty$).

Al limite per $p \rightarrow \infty$ si ha per ogni $\varepsilon > 0$ $|f|_\infty \geq \limsup_{p \rightarrow \infty} |f|_p \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} |f|_p \geq (|f|_\infty - \varepsilon)$.

Pertanto $\exists \lim_{p \rightarrow \infty} |f|_p = |f|_\infty$.

b.1- Si dimostra (come visto a lezione) $\liminf_{p \rightarrow \infty} |f|_p \geq |f|_\infty$:

Siano $M_R = M \cap B_R$, ove $B_R = \{x : |x| \leq R\}$: M_R è crescente per l'inclusione e $\bigcup_{R>0} M_R = M$. In particolare la famiglia di funzioni misurabili crescenti $|f| \chi_{M_R} \uparrow |f|$ per $R \rightarrow \infty$.

Si ha: $|f|_p \geq |f \chi_{M_R}|_p$, quindi per il punto a- si ha per ogni R :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} |f|_p \geq \lim_{p \rightarrow \infty} |f \chi_{M_R}|_p = |f \chi_{M_R}|_\infty \rightarrow |f|_\infty \quad R \rightarrow \infty$$

(Meglio e più generale è considerare $M_n = \{\frac{|f|_\infty}{n+1} < |f|\}$ sono di misura finita, per la disuguaglianza di Tschebyshev con $|f|^s$, e danno come unione crescente $\{|f| > 0\}$ che è il dominio effettivo ove si valutano le norme.)

b.2- Più semplicemente (come non si è visto a lezione) si ottiene $\limsup_{p \rightarrow \infty} |f|_p \leq |f|_\infty$:

$$|f|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \leq |f|_\infty^{1-\frac{s}{p}} \left(\int |f|^s dm \right)^{\frac{1}{p}} = |f|_\infty^{1-\frac{s}{p}} |f|_\infty^{\frac{s}{p}} \rightarrow |f|_\infty \quad p \rightarrow \infty$$

a-b-II Se $|f|_\infty = \infty$ si considera $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$. Si ha $|f_n|_\infty = n$, $|f| \geq |f_n|$ e quindi per ogni n :

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} |f|_p \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} |f_n|_p = n$$