Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XVIII foglio di esercizi: forme differenziali

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

09C2E1 Su $\mathbf{R^n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si consideri la funzione $\rho(x) := |x|$.

a) Calcolare $d\rho$;
b) data $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ di classe C^1, calcolare $d(f(\rho)\, d\rho)$.
[Osservazione:nel punto b)può esser utile esaminare il caso $n = 2$].

09C2E3 Calcolare $d[(xy^2\, dz + xz^2\, dy) \wedge (dx + dy + dz)]$.

09Ex1E2 Sia $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^4}$ la mappa data da $f(t_1, t_2) := (t_1, t_2, t_1^2, t_2^2)$, e sia ω la 2-forma su $\mathbf{R^4}$ data da

$$\omega = (x_2^2\, dx_1 - x_1^2\, dx_2) \wedge (x_4^2\, dx_3 - x_3^2\, dx_4)\ .$$

a) Calcolare $d\omega$. b) Calcolare $f^{\#}\omega$.

09Ex4E1 Calcolare il differenziale della forma ω su $\mathbf{R^n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ data da

$$\omega := f(|x|) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \omega_i$$

dove $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 e ω_i il prodotto esterno dei dx_j con $j \neq i$.

09Ex5E2 Si consideri la mappa $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ data da $f(t_1, t_2) := (t_1^2 - t_2^2, 2t_1t_2, t_1^2 + t_2^2)$ e la 2-forma su $\mathbf{R^3}$

$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2\ .$$

Calcolare $d\omega$, $f^{\#}\omega$ e $f^{\#}(d\omega)$.

09Ex5E5 Preso $a \in \mathbf{R}$, si consideri la 2-forma

$$\omega := (3x_1^2 + ax_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + 2ax_3)\, dx_2 \wedge dx_3\ .$$

a) Determinare l'insieme I degli $a \in \mathbf{R}$ per i quali ω è chiusa, ovvero $d\omega = 0$.
b) Per ogni $a \in I$ trovare una primitiva di ω, vale a dire una 1-forma σ tale che $d\sigma = \omega$.

11C2E2 Dato $a \in \mathbf{R}$, si ponga $\omega(x) := (x_1 + ax_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + (ax_1 + x_3)\, dx_2 \wedge dx_3$ per ogni $x \in \mathbf{R^3}$. Dire per quali a la forma ω è chiusa, ed in tal caso calcolarne una primitiva.

11Ex1E1 Sia $\omega(x) := \exp(|x|^2)\, (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)$ per ogni $x \in \mathbf{R^4}$. Calcolare $d\omega$ e $\omega \wedge \omega$.

11Ex2E3 Calcolare $f^{\#}\omega$ dove $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ è data da $f(x_1, x_2) := (-x_1x_2, x_1x_2, x_1^2 + x_2^2)$ e ω è la 2-forma su $\mathbf{R^3}$ data da $\omega = \exp(y_1)\, dy_2 \wedge dy_3$.

11Ex3E2 Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la 2-forma $\omega := (3x_1^2 + ax_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + 2(ax_3 + x_1)\, dx_2 \wedge dx_3$ ha differenziale nullo, ed in tal caso calcolarne una primitiva.

11Ex5E4 Sia $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ la mappa data da

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1x_2, x_3^2 - 2x_1x_2)\,,$$

e sia ω la 2-forma su $\mathbf{R^2}$ data da $\omega := y_1\, dy_1 \wedge dy_2$. Calcolare $f^{\#}\omega$ e $d(f^{\#}\omega)$.

12C2E1 a) Dato $a \in \mathbf{R}$ sia ω la forma su $\mathbf{R^3}$ data da $\omega(x) := (x_1 + x_2)e^{a(x_1+x_3)}\, dx_1 \wedge dx_2$. Dire per quali a questa forma è chiusa, e in tal caso calcolarne una primitiva.
b) Calcolare $g^{\#}\omega$ dove $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ è data da $g(s_1, s_2) := (s_1^2, s_1s_2, 1 - s_1^2)$.

12Ex1E2 Calcolare $d\omega$ dove ω è la 1-forma su $\mathbf{R^n}$ data da $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^2}\, dx_i$.

12Ex2E2 a) Si consideri una forma del tipo $\omega := \omega_1 \wedge \omega_2$ con ω_2 forma chiusa. Dimostrare che se ω_1 è chiusa allora anche ω è chiusa, e che se ω_1 è esatta allora anche ω è esatta.

b) Vale il viceversa di queste implicazioni?

12Ex3E1 Sia ω la $(n-1)$-forma su $\mathbf{R^n}$ data da

$$\omega(x) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f(|x|^2)\, x_i \bigwedge_{j\neq i} dx_j$$

dove $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1. Calcolare $d\omega$.

12Ex4E2 Per ogni $x \in \mathbf{R^n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ sia $\omega(x) = e^{|x|} \sum_i x_i dx_i$. Trovare una primitiva di ω.
[Suggerimento: cercar tra le funzioni radiali].
