Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XI foglio di esercizi: aggiunto di un operatore e metodo della separazione delle variabili

---

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌢ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

11Ex4E6 Sia X il sottospazio di $L^2(0,1)$ costituito dalle funzioni $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ di classe C^2 tali che $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$, e sia $T : X \to L^2(0,1)$ l'operatore dato da $Tu := -\ddot{u}$. Dimostrare che T è un operatore autoaggiunto e semidefinito positivo (nel senso che la forma quadratica $u \mapsto \langle Tu; u\rangle$ è semidefinita positiva su X).

12Ex2E3 Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ formato dalle funzioni $u : [-1,1] \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tali che $u(1) = 0$, e sia $T : X \to L^2(-1,1)$ l'operatore dato da $[Tu](x) := \dot{u}(-x)$. Determinare l'aggiunto di T.

09Ex1E4 Sia A un compatto con frontiera regolare in $\mathbf{R^n}$, e sia X l'insieme delle funzioni di classe C^2 su A nulle su ∂A. Dimostrare che l'operatore $-\Delta : X \to C(A)$ è autoaggiunto e definito positivo.

12Ex1E3 Sia D un dominio compatto di $\mathbf{R^n}$ con bordo di classe C^1 (cioè D è una superficie limitata di dimensione n con bordo in $\mathbf{R^n}$). Si assuma che dati un campo di vettori F ed una funzione f definiti su D, entrambi di classe C^1, si ha

$$\int_{\partial D} f\, F \cdot \eta \, d\sigma_{n-1} = \int_D f\, divF + \nabla f \cdot F \, dx\,.$$

Se X è il sottospazio di $L^2(D)$ formato dalle funzioni di classe C^2 su D che si annullano su ∂D si mostri che l'operatore di Laplace $\Delta : X \to L^2$ è autoaggiunto.

12C1E4 Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ formato dalle funzioni di classe C^2 su $[-1,1]$. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'operatore $T : X \to L^2(-1,1)$ dato da $Tu := ((x^2 - a)\,\dot{u})'$ è autoaggiunto.

11C1E5 Sia $I := [-1,1]$, e sia X il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni di classe C^2 che si annullano in ± 1. Presi $a, b \in \mathbf{R}$, si consideri l'operatore $T : X \to L^2$ definito da

$$Tu := (a + x^2)\,\ddot{u} + bx\,\dot{u}\,.$$

a) Dire per quali a e b l'operatore T risulta essere autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard di $L^2(I)$, e per quali risulta anche essere definito positivo (cioè $\langle Tu; u\rangle > 0$ per ogni $u \neq 0$).

b) Cosa cambia se si sostituisce X con tutto lo spazio delle funzioni di classe C^2 su $[-1,1]$?

09Ex3E3 Detto X lo spazio delle funzioni continue da $[-1,1]$ in $\mathbf{R}$ dotato del solito prodotto scalare, e Y il sottospazio delle funzioni di classe C^1 nulle in ± 1, si considerino gli operatori lineari $S : X \to X$ e $D : Y \to X$ dati rispettivamente da $Su(x) := \frac{1}{2}(u(x) + u(-x))$ e $Du(x) := \dot{u}(x)$.
Dire se S è autoaggiunto e calcolare l'aggiunta di SD.

09C1E5 Detto X lo spazio delle funzioni continue $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ dotato del solito prodotto scalare, indichiamo con Y il sottospazio di X delle funzioni di classe C^2 nulle in 1 e con le lettere R, S, T degli operatori lineari da Y in X.

a) Posto $Ru := -x\dot{u}$ e $Su := x\dot{u} + u$, verificare che S è l'aggiunto di R.

b) Calcolare l'aggiunto di $Tu := x^2\ddot{u}$.

09Ex2E7 Detto X lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $\|f\|_1 < +\infty$ e presa $h(x) := e^{-|x|}\cos x$, si consideri la forma bilineare su X

$$Q(f_1; f_2) := \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} h(x_2 - x_1)\, f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 \ .$$

a) Dimostrare che Q è ben definita per ogni $f_1, f_2 \in X$.
b) Trovare un'applicazione lineare autoaggiunta $T : X \to X$:
$Q(f_1; f_2) = \langle Tf_1; f_2 \rangle$, $f_1, f_2 \in X$
[Oss.:con $\langle \cdot; \cdot \rangle$ si intende l'usuale prodotto scalare su X].
c) Dimostrare che Q è definita positiva.
d) Trovare gli autovettori di T.

12Ex5E4 Dati $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}$ sia X l'insieme delle funzioni $C^2([0;1])$ che soddisfano

$$u(1) = au(0) + b\dot{u}(0)\ ,\quad \dot{u}(1) = cu(0) + d\dot{u}(0)$$

Per quali $a,\ b,\ c,\ d$ l'operatore $T : X \mapsto L^(0;1)$ dato da $Tu := -\ddot{u}$ è autoaggiunto?

ESERCIZIO n.1 Si risolvano i seguente problemi agli autovalori mettendo in evidenza la relazione con l'opportuno sviluppo trigonometrico (cfr. Foglio VIII Es. 14, 15)

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x),\ x \in [-\pi; \pi] \\ \\ f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} f''(x) = \lambda f(x),\ x \in [0; \pi] \\ \\ f(0) = f(\pi) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x),\ x \in [0; \pi] \\ \\ f'(0) = f'(\pi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f''(x) = \lambda f(x),\ x \in [0; \pi] \\ \\ f(0) = f'(\pi) = 0, \end{cases}$$

11Ex2E4 Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ dell'equazione $u_t = u_{xx}$ che soddisfa le condizioni al bordo $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e la condizione iniziale $u(0,x) = \cos^2 x$ per ogni $x \in [0,\pi]$.

09Ex3E6 Risolvere il problema $\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} & t \in [0, +\infty), \ x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, x) = 2 \sin x \, \cos(2x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$

11Ex4E6 Trovare una soluzione del problema $\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} & t \geq 0, \ x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = 2(1 - \cos x) \sin x & x \in [0, \pi] \end{cases}$

11Ex1E5 a) Calcolare i coefficienti della funzione $g(x) := 1 - \cos(2x)$ in $L^2(0, \pi)$ rispetto al sistema ortogonale $\{\sin(nx) : n = 1, 2, \ldots\}$.

b) Dimostrare che il problema $\begin{cases} u_t = u_{xx} + g \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = 0 \end{cases}$
ammette una soluzione $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ di classe C^2 in x e C^1 in t.

c) Si può dire di più sulla regolarità di questa soluzione?

09C1E6 Sullo spazio delle funzioni continue $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ consideriamo l'usuale prodotto scalare rinormalizzato per un fattore $2/\pi$, cosicché le funzioni $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \ldots$ formano un sistema ortonormale, e per ogni funzione f indichiamo con $\gamma_n(f)$ i coefficienti di f rispetto a questo sistema.

a) Se $f \in C^2$ e nulla in 0 e π, esprimere $\gamma_n(f'')$ in funzione di $\gamma_n(f)$.
b) Calcolare $\gamma_n(g)$ dove $g(x) := x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x$.
c) Trovare la soluzione del problema $\begin{cases} u_t = u_{xx} + g(x) & t \geq 0, \ x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$
d) Cosa si può dire sulla regolarità di questa soluzione per $t > 0$?
[Oss.:Dare almeno una stima dal basso per il massimo valore k tale che $u \in C^k$].

ESERCIZIO n.2 Si trovino soluzioni per il problema $\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, \pi) \\ u \in C([0; +\infty[\times [0; \pi]) \\ u(0, x) = (\sin x)^2 \end{cases}$

• Le soluzioni possono a priori esser $C^1([0; +\infty[\times [0; \pi])$?

• ESERCIZIO n.3 Si trovino eventuali soluzioni per $\begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x) \\ \\ u(t,0) \;=\; 0\;, \quad u(t,\pi) \;=\; t \\ \\ u \in C(][0;+\infty[\times[0;\pi]) \\ u \in C^1([0;+\infty[\times[0;\pi[) \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;\pi]) \\ \\ \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$

e se ne discuta la massima regolarità.

ESERCIZIO n.4 Si trovino soluzioni per i seguenti problemi

$$a - \begin{cases} \partial_t u(t,x) \;=\; \partial_{xx} u(t,x) \\ \\ u(t,0) \;=\; 0 \;=\; u(t,\pi) \\ \\ u \in C^1([0;+\infty[\times]0;\pi[) \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;\pi]) \\ \\ u(0,x) = x(\pi - x) \end{cases} \qquad b - \begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x) \qquad a < x < b \\ \\ u(t,a) \;=\; 0 \;=\; u(t,b) \\ \\ u \in C^1([0;+\infty[\times]a;b[) \\ u \in C^\infty(]0;+\infty[\times[a;b]) \\ \\ u(0,x) = (x-a)(b-x) \quad x \in [a;b] \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 5 Si trovi soluzione al problema $\begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x) & t > 0,\; x \in [0;\pi] \\ \\ u(t,0) = 0, & u_x(t,\pi) = 0 \\ \\ u(0,x) = x(2\pi - x) & x \in [0;\pi] \end{cases}$

sviluppando nell'opportuno sistema trigonometrico. Che dire della regolarità di tale soluzione?

09Ex5E4 Trovare una soluzione $u : \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \pi] \to \mathbf{R}$ del seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 5u \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) + 2\sin(3x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO n.6 Si trovino eventuali soluzioni $\begin{cases} u_{tt}(t,x) \;=\; u_{xx}\,(t,x) - u(t,x) \\ \\ u(t,0) \;=\; 0 \;=\; u(t,\pi) \\ \\ u(0,x) = \sin x \qquad u_t(0,x) = \sin x \end{cases}$

12C1E5 Si consideri il problema: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \\ u_t(0,\cdot) = 0 \end{cases}$

a) Trovare una soluzione $u : \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \pi] \to \mathbf{R}$ del problema per $u_0(x) := \sin^3 x$ e determinare il comportamento asintotico di $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$.

b) Determinare il comportamento asintotico $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$ quando u è la soluzione con $u_0(x) := \sin^{2k+1} x$ con k intero positivo.

12Ex3E7 Data $g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua, si consideri il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = g(t)\sin x & (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in (0, +\infty) \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

a) Risolvere quando g è la funzione costante 1.

b) Trovare una funzione limitata g tale che la soluzione $u(t, x)$ è illimitata.

09Ex2E5 Dati $a \in \mathbf{R}$ e $b : [0, T] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ funzione continua, si consideri il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + au + b(t, x) & [0, T] \times [0, \pi] \\ \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in [0, T] \\ \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Dimostrare che esiste al più una soluzione $u : [0, T] \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ di classe C^2.

11Ex3E6 a) Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ dell'equazione $u_t = -u_{xxxx}$ che soddisfa le condizioni al bordo $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e la condizione iniziale $u(0, x) = (1 + 4\cos x)\sin x$ per ogni $x \in [0, \pi]$.

b) Tale soluzione è unica?

12Ex2E5 Data $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbf{R}$ soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 & [0, +\infty) \\ \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) & [0, \pi] \end{cases}$$

dimostrare che $\|u(t, \cdot)\|_1 = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$, esplicitando le ipotesi fatte sulla regolarità di u (e di u_0).

ESERCIZIO n. 7 Quale equazione soddisferebbe il prolungamento per disparità della soluzione di

$$\begin{cases} u_t(t, x) \ = \ u_{xx}(t, x) + u_x(t, x) & t > 0,\ x \in [0; \pi] \\ \\ u(t, 0) = 0, & u(t, \pi) = 0 \\ \\ u(0, x) = \sin x & x \in [0; \pi] \end{cases}$$
