Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

VIII foglio di esercizi: schema della teoria e sviluppi dell'analisi *in punctiis* delle serie di Fourier

---

Testi da cui si è preso spunto: H.Dym H.P.Mc Kean "Fourier series and integrals":Ch. 1. A.A.Kirillov A.D.Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale":es. 645-650, 652, 653. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" Ch. 12.1-12.2- 12.3-12.4-12.5-12.6; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2;
H.F.Weinberger "A first course in Partial Differential Equations with complex variables and transform methodods": Ch. IV, V, VI, VII.
S.Salza G.Verzini "Equazioni a derivate parziali: complementi ed esercizi": cap 2.2.1: pb. n.2.1-2.3, 2.5, 2.6, 2.8; cap 2.2.3: pb. 2.18; cap 2.2.5 pb.2.24, 2.25; cap 2.3: es.3.3, 3.4, 3.6; cap. 4.2.1: pb. 2.1, 2.5, 2.10; cap. 4.3: es. 3.1-3.5.

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

NOTA: Gli esercizi 1, 2 e 3 propongono i primi teoremi elementari sulla convergenza puntuale ed uniforme delle serie di Fourier di funzioni regolari a tratti. Nei temi successivi questi risultati vengono rafforzati con tecniche più raffinate.

ESERCIZIO n.1 (Cfr. Es. 10c Foglio VII) Si provi che la serie di Fourier di una funzione periodica e Lipschitziana converge totalmente in norma L^∞ sul periodo: e quindi uniformemente ad essa sul periodo.

⌒ ESERCIZIO n.2 a- Ci si convinca, anche con un interpretazione geometrica, che

$$\sum_M^N a_k b_k \ = \ a_N \sum_M^N b_k - \sum_M^{N-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_M^k b_h$$

e lo si dimostri.
b- Si ricavi che se la serie dei b_k è limitata e la successione a_k è infinitesima con serie degli incrementi $|a_{k+1} - a_k|$ sommabile allora la serie dei prodotti è convergente.
c- Si ricavi che se la serie dei b_k è convergente e la successione a_k è solo con serie degli incrementi $|a_{k+1} - a_k|$ sommabile allora la serie dei prodotti è convergente.

◦ ESERCIZIO n.3 a- Si usi l'esercizio precedente per mostrare che la serie di Fourier di $\mu(x) = x - \pi$, $0 < x < 2\pi$, $\mu(0) = 0$, prolungata per periodicità, converge uniformemente in $\varepsilon \le |x| \le \pi$.
b- Si provi che la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica f, continua a tratti e C^1 negli intervalli chiusi di continuità , converge uniformemente nel complementare dell'unione di intorni dei punti di discontinuità (eventualmente comprendendo tra questi gli estremi del periodo). [Se x_j sono i punti di discontinuità nel periodo si ponga $\delta_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$, e si consideri $g(x) = f(x) + \sum \frac{\delta_j}{2\pi}\mu(x - x_j)$].
c- Si provi che la serie di Fourier di f nei punti di discontinuità converge a $\dfrac{f(x_j^+) + f(x_j^-)}{2}$.
d- Si provi che le somme parziali della serie di Fourier sono uniformemente limitate.

◦ ESERCIZIO n.4 a- Sia f 2π-periodica sommabile sul periodo, detta $S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ la n^a-somma parziale della serie di Fourier, si provi che $S_n(f)(x) = S_n(x) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt \; =: \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; D_n(x-t)\,dt \; = \; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\; D_n(t)\,dt$$

$$D_n(t) =: \frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos kt = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{2}\;\sum_{-n}^{n}e^{ikt}\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{2}\;z^{-n}\;\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}\right),\quad \textit{Nucleo di Dirichlet.}$$

b- $\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos kz\right)\sin\frac{z}{2} \; = \; \frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2}+\sum_{1}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})z-\sin(k-\frac{1}{2})z\right) \; = \; \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2}$

c - $D_n(x) = D_n(x+2\pi) = D_n(-x)$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$, $\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt \sim \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}\,dt \to +\infty$

d- $S_n(x) - f(x) \; = \; \frac{1}{\pi}(\chi_{[-\pi;\pi]}D_n) * f(x) - f(x) \; = \; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left[t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]dt$

◦ ESERCIZIO n.5 a- (test del Dini) Osservando, cfr. Foglio VII es. 9b, che per le funzioni $\sin(n+\frac{1}{2})z = \sin nz\cos\frac{z}{2} + \cos nz\sin\frac{z}{2}$ vale il teorema di Riemann-Lebesgue si provi che se

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt < \infty \qquad \text{allora} \qquad S_n(x) \to f(x).$$

b- Si provi un criterio analogo se f non è continua in x ma vi sono limite destro e sinistro $f(x^+)$ ed $f(x^-)$, considerando gli integrali tra $[-\pi, 0]$ e tra $[0, \pi]$.
c- Se $f \in L^1$ è essenzialmente Hölderiana in x (i. e. $|f(y)-f(x)| \le C|x-y|^\alpha$, $\alpha \le 1$, q.o. y vicino ad x) allora la serie di Fourier converge in x a $f(x)$ (cfr. Foglio VII Es. 13).

◦ ESERCIZIO n. 6 (Località) • a- Sia f 2π-periodica sommabile sul periodo, nulla nell'intervallo $]a;b[$. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $S_n \to 0$ uniformemente su $]a+\varepsilon; b-\varepsilon[$.
[Si usi 4d, 5a e, Foglio VII Es. 9e per le famiglie di funzioni $z \mapsto \frac{f(x+z)}{2\tan\frac{z}{2}}$, $f(x+z)$, dando una stima uniforme al variare del parametro $x \in]a+\varepsilon; b-\varepsilon[$].
b- Se due funzioni sommabili periodiche coincidono su un intervallo aperto la differenza delle loro serie di Fourier converge unformemente a 0 sui compatti contenuti nell'intervallo aperto.

• ◦ ESERCIZIO n. 7 a- Confrontare $\int_0^\pi |D_n(t)|dt$ con $\log n$ per $n \to \infty$.[Cfr. 4c].
b- Sia f sommabile periodica: allora $|S_n|_{L^\infty} = O(\log n)$.
c- Si mostri che vi è $M > 0$: per ogni $x \in [0;\pi]$ si ha $\sum_{k=1}^{n}\sin kx \ge \frac{1}{\log n}\frac{1-\cos((n+\frac{1}{2})x)}{x} - M$.
d- Si deduca che $\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin kx}{\log k}$, pur essendo una serie di polinomi trigonometrici convergente puntualmente, non è serie di Fourier di alcuna funzione sommabile.
e- Sia f sommabile periodica e continua in x_0 allora $S_n(x_0) = o(\log n)$. [Per 6b ci si riduca al caso $f \equiv 0$ fuori da $[x_0-\delta; x_0+\delta]$.]
f- Tale stima è uniforme al variare di x_0 in un compatto ove f sia continua.

NOTA: La serie di Fourier di una funzione continua periodica può non esser puntualmente limitata: cfr. A.Zygmund K.L.Wheeden "Measure and Integral" Ch. 12.4 Theorem 12.35 per un esempio concreto, cfr. Teorema Banach-Steinhaus per comprendere che la non limitatezza in qualche punto delle serie di Fourier è una condizione generica, pur essendo convergente quasi ovunque per il teorema, di dimostrazione impegnativa, di Carleson.
Invece elementarmente si trovano serie $\sum a_k e^{ikx}$ convergenti in ogni punto pur non essendo serie di Fourier di alcuna funzione periodica sommabile [cfr. Es 7d].

TEOREMA (Hardy) Sia (a_n) una successione numerica se:

$$|a_n| \leq \frac{C}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k} a_h \to S \in \mathbf{R} \qquad \text{allora} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \to S$$

[Cfr. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measure and Integral" Ch. 12.5 Theorem 12.45.]

NOTA: per tali (a_n) è elementare osservare che le somme parziali sono sono limitate nel caso lo siano le loro medie aritmetiche:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k} a_h = \frac{a_0 + (a_0+a_1) + \ldots + (a_0 + \ldots + a_n)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}a_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k a_k.$$

Visto il comportamento dei coefficienti di Fourier per le funzioni f a variazione limitata, cfr. Foglio VII Es.10-11, è opportuno esaminare la convergenza in media aritmetica delle somme parziali di Fourier di tali funzioni, $S_n^f(x)$, e analizzare il cosidetto *nucleo di Fejér*:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k^f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)dt =:$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt$$

$$K_n(t) \ =: \ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin t(k+\frac{1}{2}) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin t\frac{n+1}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Si ha direttamente che (K_n) è una famiglia di *approssimanti dell'identità pari* (per cui $2f * K(x) = \int[f(x+y)+f(x-y)]K(y)dy$). Usando lo stesso spezzamento dell' integrale e le stesse stime utili per risolvre l'esercizio 1a del Foglio III-ter si dimostra agevolmente il seguente:

TEOREMA: Sia f una funzione 2π periodica e sommabile sul periodo, allora :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt \to \frac{\lim_{x^+} f + \lim_{x^-} f}{2}$$

per ogni x per cui esistono limite destro e sinistro. Inoltre la convergenza è uniforme su ogni intervallo chiuso di punti di continuità delle funzione.

Grazie al teorema di Hardy per quanto enunciato nell'esercizio 11 del VII Foglio si ha:

TEOREMA (Dirichlet-Jordan) Sia f una funzione 2π periodica e a variazione limitata allora:

a-la sua serie di Fourier converge in ogni punto alla media aritmetica tra limite destro e limite sinistro della funzione.
b- La convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso di punti di continuità della funzione.
c- Le somme parziali della serie di Fourier son limitate in norma uniforme [$|f * K_n| \leq |f|$ e nota al teorema di Hardy].
[Cfr. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measure and Integral" Ch. 12.6 Theorem 12.47, 12.50.]