Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

V foglio di esercizi (complemento): continuità dioperatori lineari tra spazi normati

---

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Testi da cui si è preso spunto: A.A. Kirillov A.D. Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale" cap. I, II, III; A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" cap. 3, 5, 8 10, 11; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2; W.Rudin "Analisi Reale e Complessa" cap 1, 2, 3,4.

∘ $\frown$ ESERCIZIO n.1 Siano U e V spazi normati ed $L : U \to V$ un operatore lineare. L è continuo se e solo se è limitato sulla palla unitaria di U. Nel caso

$$\sup_{0<|u|_U} \frac{|L(u)|_V}{|u|_U} = \sup_{0<|u|_U\leq 1} \frac{|L(u)|_V}{|u|_U} = \sup_{|u|_U=1} |L(u)|_V = \sup_{0<|u|_U\leq 1} |L(u)|_V =: \|L\|_{\mathcal{BL}(U,V)}$$

è una norma sullo spazio degli operatori lineari continui (limitati).

∘ ESERCIZIO n.2 (Algebra) a- Se F è un funzionale (a valori in $\mathbf{R}$) lineare non nullo sullo spazio vettoriale reale V allora $\mathrm{codim}KerF = 1$.
b- Se F e G sono funzionali lineari su uno spazio vettoriale V si ha $KerF = KerG$ se e solo se $F = \lambda G$.

$\frown$ ESERCIZIO n. 3 a- Il funzionale lineare $\delta : C([0;1]) \to \mathbf{R}$ dato da $\delta f = f(0)$, non ammette estensioni per densità continue e quindi lineari a $L^2(0;1)$.
[Si tratta di mostrare che non esiste alcun numero M per cui $|f(0)| \leq M|f|_2$ per ogni funzione continua f.]
b- Sia $C_c(\mathbf{R})$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto: il funzionale lineare $M : C_c(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $Mf = \int f$ non può essere esteso con continuità ad $L^2(\mathbf{R})$.

∘ $\frown$ ESERCIZIO n.4 a- Sia $\tau_h(f)(x) = f(x + h)$ per $f \in C(\mathbf{R}^n)$. Si provi che τ_h si estende ad un operatore lineare e continuo da $L^p(\mathbf{R})$, in se.
b- Posto $C = \{f \in L^p : \lim_{\delta\to 0} \sup_{|h|\leq\delta} \|\tau(f) - f\|_p = 0\}$, $p < \infty$, si provi che C è un sottospazio vettoriale di L^p, e che è chiuso.
c- Si provi che C contiene le funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita. Si deduca quindi che

$$\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n) \quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{|h|\leq\delta} \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f(x + h)|^p dx = 0$$

$\circ$ ESERCIZIO n.5 Sia $G \in L^2((0;1) \times (0;1))$ e si ponga $\mathcal{G}(f)(x) = \int_0^1 f(y)G(x,y)dy$.
a- Si provi che $\mathcal{G}$ definisce un operatore lineare continuo da $L^2(0;1)$ in se.
b- Prolungando a zero sia G che le funzioni di $L^2(0;1)$ rispettivamente fuori da $(0;1) \times (0;1)$ e da $(0;1)$, e considerando l'operatore $\tau_h[f](x) = f(x+h)$ si provi che

$$\lim_{h \to 0} \sup_{|f|_{L^2} \leq 1} |\tau_h[\mathcal{G}(f)] - \mathcal{G}(f)|_{L^2} \quad = \quad 0$$

$\circ$ ESERCIZIO n. 6 (operatori di Hilbert-Schimdt) Sia (e^n), $n \in \mathbf{N}$ una base di Hilbert di H e sia (g^n_m), $m, n \in \mathbf{N}$ una successione di numeri per cui $\sum_n \sum_m |g^n_m|^2 = C < \infty$. Posto $\mathcal{G}(e^n) \quad = \quad \sum_m g^n_m e^m$
a- Si provi che $\mathcal{G}(e^n)$ è un ben definito elemento di H e se ne calcoli la norma.
b- Si provi che l'estensione per linearità di $\mathcal{G}$ a vectorspan (e^n) è continua.
c- Indicando ancora con $\mathcal{G}$ l'estensione per densità a tutto H di tale operatore si provi che

$$|\mathcal{G}|^2_{\mathcal{BL}(H,H)} \;\leq\; \sum_n |\mathcal{G}(e^n)|^2 \quad =: \quad |\mathcal{G}|_{\mathcal{HS}}$$

si provi quindi che $|\mathcal{G}|_{\mathcal{HS}}$ non dipende dalla base di Hilbert scelta.
