**Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica**

Alberti, Tortorelli

IIIter foglio di esercizi (complemento):approssimazione uniforme dell'identità, compattezza, e densità dei polinomi e dei polinomi trigonometrci in $L^P$

---

Legenda: $\bullet$ esercizi impegnativi, $\circ$ di approfondimento e più teorici, $\frown$ esercizi 'ponte'.

---

Criteri di compattezza in $L^p$ basati solo su concetti di teoria della misura e non sulla stuttura vettoriale di $\mathbf{R}^d$ non verranno qui proposti. Per la densità in $L^p$ dei polinomi e dei polinomi trigonometrici si da una versione 'artigianale" dei teoremi di Stone-Weiestrass esposti a lezione.

---

$\circ$ $\frown$ ESERCIZIO n.1 (approssimazione uniforme dell'identità ) Si dice *famiglia di approssimanti dell'identità* una famiglia $(\varphi_n)$ per cui

$$\varphi_n \geq 0, \qquad \int \varphi_n = 1, \qquad \forall \delta > 0 \ \int_{\{|x|\geq\delta\}} \varphi_n \to 0 \ \ n \to \infty.$$

a- Nel caso si ha

$$\forall g \text{ limitata, continua in } x_0 \ \ g * \varphi_n(x_0) \to g(x_0) \qquad \forall p \in < \infty \ \ \forall f \in L^p \ \ f * \varphi_n \to_{L^p} f;$$
$$\forall g \text{ limitata, uniformemente continua } g * \varphi_n \to_{L^\infty} g$$

b- Data $\mathcal{F} \subseteq L^p, \ p < \infty$ per cui $\quad \sup_{\mathcal{F}} |f|_{L^p} < \infty \quad, \sup_{\mathcal{F}} |f - \tau_y f|_{L^p} \to 0, \ y \to 0$ allora

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f - f * \varphi_n|_{L^p} \to 0, \ n \to \infty$$

---

$\bullet \circ$ $\frown$ ESERCIZIO n.2 (Criterio di compattezza di Frechet-Kolmogorov in $L^p$ con la misura di Lebesgue)

a- Sia $\Omega$ aperto in $\mathbf{R}^d$ e $A$ con chiusura compatta in $\Omega$. Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega), \ p < \infty$ è tale che

$$\sup_{\mathcal{F}} |f|_{L^p(\Omega)} < \infty, \qquad \sup_{\mathcal{F}} |f - \tau_y f|_{L^p(A)} \to 0 \ \ y \to 0$$

allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta in $L^p(A)$.

b- Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq L^p(\mathbf{R}^d), \ p < \infty$ è relativamente compatta in $L^p(\mathbf{R}^d)$ se e solo se

$$\sup_{\mathcal{F}} |f|_{L^p(\mathbf{R}^d)} < \infty, \qquad \sup_{\mathcal{F}} |f - \tau_y f|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \to 0 \ \ y \to 0, \qquad \sup_{\mathcal{F}} |f|_{L^p(\{|x|>R\})} \to 0 \ \ R \to \infty$$

c- Enunciare e provare un analogo criterio di compattezza in $L^p(\Omega), \ p < \infty$ quando $\Omega$ è un aperto di $\mathbf{R}^d$.

---

$\circ$ $\frown$ ESERCIZIO n.3 (densità polinomi trigonometrici e polinomi in $L^p([a, b])$)

a- Sia $g_n(x) = c_n \left(\dfrac{\cos x + 1}{2}\right)^n \chi_{[-\pi;\pi]}$ in mdo che $\int g_n = 1$. Si provi che $(g_n)$ è una famiglia di approssimanti dell'identità.

b- Considerando le convoluzioni $g_n * f$ con $f \in C(\mathbf{R})$ e $2\pi$-periodica si provi che i polinomi trigonometrici son densi in $\{f \in C([-\pi;\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ e quindi in $L^p(-\pi, \pi)$.

c- Si deduca la densità dei polinomi in $C([0;\pi])$ e quindi in $L^p(0, \pi)$.