Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

IIbis foglio di esercizi: Spazi L^p

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

ESERCIZIO n.1 Su un insieme di misura finita se una successione di funzioni misurabili:

a- $f_n \to f$, $n \to \infty$, in misura
b- per un $\overline{p} > 1$ si ha $sup_n |f_n|_{L^{\overline{p}}} < \infty$

allora $f \in L^{\overline{p}}$ e per ogni $p < \overline{p}$ si ha $f_n \to f$ in L^p.

$\bullet$ ESERCIZIO n.2 Se u $0 < p < \infty$ e per una successione di funzioni misurabili si ha:

a- $f_n \to f$, $n \to \infty$, in misura
b- $|f_n|^p_{L^p} \to |f|^p_{L^p}$

allora si ha $f_n \to f$ in L^p.

[i- Usando Fatou si provi che per ogni E si ha $\int_E |f_n|^p \to \int_E |f|^p$
ii- Ci si riduca ad un insieme di misura finita mostrando che per ogni ε vi è E di misura finita per cui $\int_{^cE} |f|^p \leq \varepsilon$
iii-Si usi l'assoluta continuità degli integrali di $|f|^p$ (cfr. I foglio Es. 10) e Severini-Egoroff per concludere.]
