ESERCIZI SUI GRUPPI

Esercizio 1. *Si consideri l'insieme:*

$$G \,=\, \{2^k :\; k \in \mathbb{Z}\}$$

Consideriamo su G l'ordinaria operazione di moltiplicazione: $(\cdot)$, dimostrare che $(G, \cdot)$ è un gruppo commutativo.

Esercizio 2. *Sia $G = \{a + b\sqrt{2} :\; a, b \in \mathbb{Q}\}$ dimostrare che G con l'usuale operazione di somma tra numeri è un gruppo commutativo. Determinare alcuni suoi sottogruppi.*

Esercizio 3. *Sia G un gruppo. Se $a, b \in G$ sono tali che $a^{-1}b^2a = ba$ allora $a = b$.*

Esercizio 4. *Sia G un gruppo. Siano a, b, c tre suoi elementi. Determinare l'unica soluzione $x \in G$ dell'equazione:*

$$a\, x\, b \,=\, c.$$

Esercizio 5. *Sia G un gruppo (non necessariamente commutativo). Dimostrare che se a, b sono due elementi di G tali che $ab = ba$ allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $a^n\, b \,=\, b\, a^n$.*

Esercizio 6. *Sia G un gruppo (non necessariamente commutativo). Dimostrare che se a, b sono due elementi di G tali che $ab = ba$ allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha $a^n\, b^m \,=\, b^m\, a^n$.*

Esercizio 7. *Sia G un gruppo (non necessariamente commutativo). Dimostrare che se $a_1, a_2, \cdots, a_k$ e b sono due elementi di G tali che $a_ib = ba_i$, per $i = 1, 2, \cdots, k$, allora per ogni $n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$(a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \cdots\, a_k^{n_k})\, b \,=\, b\, (a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \cdots\, a_k^{n_k}).$$

Esercizio 8. *Sia G un gruppo (non necessariamente commutativo). Dimostrare che se $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sono elementi di G che commutano a due a due allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$:*

$$(a_1\, a_2\, \cdots a_k)^n \,=\, a_1^n\, a_2^n\, \cdots\, ,\, a_k^n.$$

Esercizio 9. *Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ consideriamo la legge di composione $(\times)$ definita nel modo seguente:*([1])

$$(a, b) \times (c, d) = (a + c, (-1)^c\, b + d)$$

Dimostrare che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \times)$ è un gruppo (non commutativo).

[1]Se $c \in \mathbb{Z}$ ricordiamo che

$$(-1)^c \,=\, \begin{cases} -1 & \text{se} \quad c \quad \text{è dispari} \\ \\ 1 & \text{se} \quad c \quad \text{è pari} \end{cases}$$

Esercizio 10. *Si consideri l'insieme*

$$G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n},\ m,\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dimostrare che G con l'usuale operazione di moltiplicazione tra numeri è un gruppo commutativo.

Esercizio 11. *Si consideri l'insieme*

$$G = \left\{ \frac{1+it}{1-it}:\ t \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \{-1\}.$$

Dimostrare che G con l'operazione di moltiplicazione definita in $\mathbb{C}$ è un gruppo commutativo.

Esercizio 12. *Sia $G = \{a, b, c, d\}$, dove ciascun elemento è diverso dagli altri. Dire quale delle due tabelle seguenti,ognuna delle quali che definisce una diversa operazione $\cdot$ su G, è tale che $(G, \cdot)$ sia un gruppo.*

(a)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

(b)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	b	a
c	c	b	a	d
d	d	a	d	c

Esercizio 13. *Sia $G = \{u, a, b, c, d\}$. Dimostrare che non è possibile completare la seguente tabella che definisce una operazione $\cdot$ in G in modo tale che $(G, \cdot)$ sia un gruppo.*

$\cdot$	u	a	b	c	d
u					
a			b		
b					
c					
d	d				

Esercizio 14. *Sia $G = \{a, b, c, d, e\}$. Completare la seguente tabella che definisce una operazione $\cdot$ in G in modo tale che $(G, \cdot)$ sia un gruppo.*

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	c			
b	c				
c					
d					d
e					

Esercizio 15. *Dimostrare che*

$$G = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0 + 0\sqrt{2}\}$$

è un gruppo commutativo rispetto all'ordianria motiplicazione definita in $\mathbb{R}$.

Esercizio 16. *Si considerino i seguenti gruppi: $(\mathbb{Z}_4, +)$ e $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot)$, dimostrare che sono isomorfi.*

Esercizio 17. *Dimostrare che i gruppi abeliani* $(\mathbb{Z}_9,+)$ *e* $(\mathbb{Z}_3,+)$ *sono omomorfi. Determinare il nucleo dell'omorfismo che viene stabilito tra i due gruppi.*

Esercizio 18. *Dimostrare che i gruppi* $(\{1,i,-1,-i\},\cdot)$ *e* $(\mathbb{Z}_4,+)$ *sono isomorfi.*

Esercizio 19. *Dato il gruppo* $G=(\{1,i,-1,-i\},\cdot)$ *si considerino le applicazioni definita da*

$$\begin{aligned} \varphi_n(g) &= g^{4n} \qquad g\in G \\ \psi_n(g) &= g^{4n+2} \quad g\in G. \end{aligned}$$

Dimostrare che φ *e* ψ *sono endomorfismi e determinarne i nuclei.*

Esercizio 20. *Si considerino i seguenti gruppi:*
$G_1=(\{3^a\ 5^b,\ a,b\in\mathbb{Z}\},\cdot)$, *sottogruppo di* $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
e
$G_2=(\{a+ib:\ a,b\in\mathbb{Z}\},+)$ *sottogruppo di* $(\mathbb{C},+)$,
si dimostri che G_1 *e* G_2 *sono isomorfi.*

Esercizio 21. *Sia* $(G,\times)$ *un gruppo,* B *un insieme e* $f:\ G\longrightarrow B$ *una applicazione biunivoca. Definiamo su* B *la seguente operazione*

$$\forall a,b\in G:\quad f(a)\otimes f(b)\ =\ f(a\times b).$$

Si dimostri che $(B,\otimes)$ *è un gruppo.*