ANALISI MATEMATICA II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 30/6/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1 (Punti 6)

Discutere la converegenza delle seguenti serie al variare del parametro reale x :

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+n^2}}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x\, n!}{3^n\, n^n}.$$

ESERCIZIO 2 (Punti 8)

Data la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4}\;+\;\frac{\pi}{4}\right)},$$

dimostrare che è periodica e determinarne il periodo; trovare il campo di esistenza, i punti (se esistono) di massimo o di minimo relativo, gli intervalli di monotonia, di concavità o convessità, eventuali flessi, punti angolosi o cuspidi. Tracciarne un grafico approssimato.

ESERCIZIO 3 (Punti 8)

Risolvere il problema di Cauchy e tracciare un grafico approssimato della soluzione

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}\;\; u^2(t), \\[2ex] u(1) \;=\; \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4 (Punti 8+3)

Siano $\alpha,\, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Si consideri l'equazione integrale

$$u(t) \;=\; \beta(t) \;+\; \alpha(t) \int_{t_0}^{t} u(s)\;\, ds.$$

(a) Senza tentare di risolvere l'equazione e supponendo che la soluzione esista dimostrare che essa è continua.

(b) Dimostrare che la soluzione esiste nell'ipotesi che $\alpha,\, \beta$ appartengono a $C^1(\mathbb{R})$.

(c)* Se esistono $M_1,\, M_2 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che per ogni $t_1,\, t_2 \in [a,b]$ si abbia:

$$|\alpha(t_1)\; - \;\alpha(t_2)| \;\le\; M_1\, |t_1 - t_2|^c, \qquad |\beta(t_1)\; - \;\beta(t_2)| \;\le\; M_2\, |t_1 - t_2|^c,$$

dimostrare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $x_1,\, x_2 \in [a,b]$ risulta

$$|u(t_1)\; - \;u(t_2)| \;\le\; M\; |t_1 - t_2|^c,$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 (Punti 6)

Discutere la converegenza delle seguenti serie al variare del parametro reale x :

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+n^2}}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x\, n!}{3^n\, n^n}.$$

Svolgimento.

(a) Studiamo la convergenza assoluta della serie considerando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{1+n^2}}$.
Poiché è a termini positivi possiamo applicare il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{1+n^2}}} = |x| \tag{1}$$

Perché

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{1+n^2}} = 1$$

in quanto si applica il criterio del confronto per i limiti alle diseguaglianze: per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$1 < \sqrt[n]{\sqrt{1+n^2}} < \sqrt[n]{\sqrt{2n^2}} < \sqrt[2n]{2}\, \sqrt[n]{n},$$

In base al criterio della radice ennesima da (1) deduciamo che per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge.
Se $x > 1$ osserviamo che il termine generale della serie non è infinitesimo, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+n^2}} = +\infty$$

quindi la serie, essendo in questo caso a termini positivi, diverge.

Sia $x = 1$. Consideriamo quindi
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$.
Essendo a termini positivi possiamo applicare il criterio del limite.
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$
La serie considerata ha, come conseguenza del criterio del limite, lo stesso comportamento della serie armonica
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, che ha esponente $\alpha = 1$ e quindi diverge.

Sia $x = -1$. Consideriamo
$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$.
La serie è a termini di segno alterno, converge per il criterio di Leibniz. Infatti la successione $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$
tende a zero ed è decrescente:

$$n < n+1 \iff n^2 < (n+1)^2 \iff 1+n^2 < 1+(n+1)^2 \iff \sqrt{1+n^2} < \sqrt{1+(n+1)^2} \iff \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}}.$$

Infine se $x < -1$, consideriamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+n^2}}$, che possiamo scrivere $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{\sqrt{1+n^2}}$.
Si tratta ancora di una serie a termini di segno alterno, ma la successione $a_n = \frac{|x|^n}{\sqrt{1+n^2}}$ tende a $+\infty$, quindi la serie non converge.

(b) La serie è a termini positivi, possiamo applicare il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^x \ (n+1)!}{3^{n+1}\,(n+1)^{n+1}} \frac{3^n\, n^n}{n^x\, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^x \ n^n}{n^x\,(n+1)^n\ 3} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{3} = \frac{1}{3e} < 1.$$

La serie è quindi convergente.

ESERCIZIO 2 (Punti 8)

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

dimostrare che è periodica e determinarne il periodo; trovare il campo di esistenza, i punti (se esistono) di massimo o di minimo relativo, gli intervalli di monotonia, di concavità o convessità, eventuali flessi, punti angolosi o cuspidi. Tracciarne un grafico approssimato.
Svolgimento Determiniamo il minimo $T > 0$ tale che $f(x) = f(x+T)$, ovvero

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sin\left(\frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = f(x+T)$$

da cui

$$\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

e quindi

$$\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{x+T}{4} + \frac{\pi}{4} + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad T = k8\pi.$$

Il periodo minimo è $T = 8\pi$.
Il campo di esistenza della funzione è determinato, a causa della presenza della radice quadrata, dalle soluzioni della disequazione

$$\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow k2\pi \leq \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \leq \pi + k8\pi \iff -\pi + k2\pi \leq x \leq 3\pi + k8\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vista la periodicità, ci limitiamo a studiare la funzione sull'intervallo $[-\pi\,,\,3\pi]$.

Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}{8\sqrt{\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Nell'intervallo considerato
$f'(x) > 0 \iff -\pi < x < \pi$, $f'(x) = 0 \iff x = \pi$ e $f'(x) < 0 \iff \pi < x < 3\pi$.
Di conseguenza si ha che il punto $x = \pi$ è di massimo relativo ed ovviamente, in questo caso anche assoluto.
La funzione risulta crescente sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e decrescente su $[\pi, 3\pi]$. Inoltre

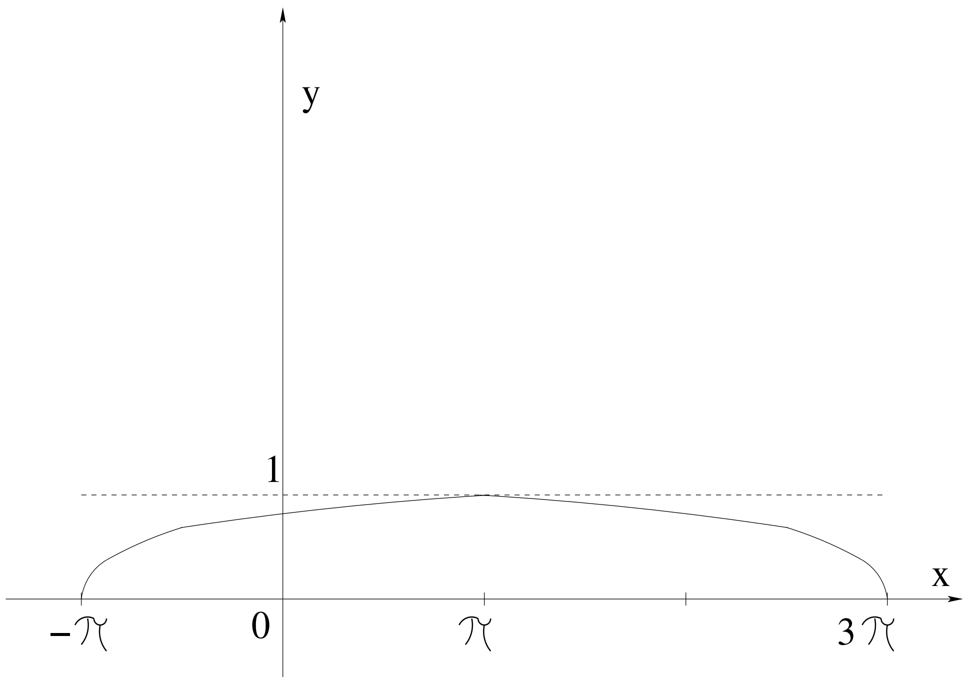
$$\lim_{x\to-\pi+} f'(x) = \lim_{x\to\pi-} f'(x) = \infty.$$

La tangente al grafico di f nei punti $x = -\pi$ e $x = \pi$ è verticale.

Calcoliamo la derivata seconda.

$$f'(x) \;=\; \frac{-128\sin^2\left(\frac{x}{4}\,+\,\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{x}{4}\,+\,\frac{\pi}{4}\right)}{64\sqrt{\sin\left(\frac{x}{4}\,+\,\frac{\pi}{4}\right)}\;\;\sin\left(\frac{x}{4}\,+\,\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Nel campo di esistenza della funzione f'' risulta sempre negativa, di conseguenza la funzione è concava. Possiamo a questo punto tracciare un grafico di f.



ESERCIZIO 3 (Punti 8)

Risolvere il seguente problema di Cauchy e tracciare un grafico approssimato della soluzione

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}\;u^2(t), \\[2ex] u(1) \;=\; \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}. \end{cases}$$

Svolgimento.

Posto $A(t) = \dfrac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}$ e $B(u) = u^2$, osserviamo che A è definita per ogni $t \neq 0$ e $-2 < t < 2$, cerchiamo quindi la soluzione in $(0, 2]$, essendo il dato iniziale posto per il valore di $t = 1$ interno a questo intervallo. Inoltre B, che è definita per ogni $u \in \mathbb{R}$ si annulla solo per $u = 0$, che però non coincide con il dato iniziale $u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{27}}}$.. Per il teorema di esistenza ed unicità di soluzione del problema di Cauchy relativo alle equazioni a variabili separabili, siamo in grado di affermare che esiste una ed una sola soluzione sull'intervallo $(0, 2]$.

Calcoliamo questa soluzione scrivendo l'equazione data nella forma:

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} \;=\; \frac{\sqrt{(4-t^2)}}{t^4}$$

Integriamo primo e secondo membro

$$\int_1^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\,ds \;=\; \int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\;ds. \tag{2}$$

Nel primo membro effettuiamo il cambiamento di variabile $\sigma = u(s)$ ed otteniamo

$$\int_1^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\,ds \;=\; \int_{u(1)}^{u(t)} \frac{1}{\sigma^2}\;d\sigma = \left[-\frac{1}{\sigma}\right]_{\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{27}}}}^{u(t)} = -\frac{1}{u(t)} \;+\; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}}. \tag{3}$$

Per quanto riguarda l'integrale al secondo membro osserviamo che può essere scritto nella forma

$$\int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\;ds \;=\; \int_1^t s^{-4}(4-s^2)^{\frac{1}{2}}\,ds,$$

si tratta di un integrale binomio, dove $m = -4$, $p = 2$, $q = \dfrac{1}{2}$. Osserviamo che risulta intero $q + \dfrac{m+1}{p}$.
Risolviamo ponendo: $\tau = s^2$.

$$\int_1^t \frac{\sqrt{(4-s^2)}}{s^4}\;ds \;=\; \int_1^{t^2} \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4-\tau}}{\tau^2\sqrt{\tau}}\,d\tau \;=\; \int_1^{t^2} \frac{1}{2\,\tau^2}\sqrt{\frac{4-\tau}{\tau}}\;d\tau$$

Operiamo il seguente cambiamento di variabile : $r = \sqrt{\dfrac{4-\tau}{\tau}}$ da cui $d\tau = \dfrac{-8r}{(1+r^2)^2}\,dr$. L'integale si scrive nella forma

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{4-t^2}{t^2}}} -\frac{1}{4}\,r^2\,dr \;=\; \left[-\frac{1}{12}\,r^3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\frac{4-t^2}{t^2}}} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4} \;-\; \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{t^3}$$

Da questo, tenuto conto di (2) e (3) otteniamo:

$$-\frac{1}{u(t)} \;+\; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \;-\; \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{t^3} \;\Longleftrightarrow\; u(t) \;=\; \frac{1}{\frac{\sqrt{(4-t^2)^3}}{12\,t^3} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{12}} \;-\; \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Osserviamo che l'integrale (4) può essere risolto anche nel modo che segue.
Ponendo $s = 2\cos\tau$, quindi $ds = -2\sin\tau\ d\tau$, otteniamo

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{2\sin\tau}{16\cos^4\tau}\ (-2\sin\tau)\ d\tau = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{\sin^2\tau}{4\cos^2\tau}\,\frac{1}{\cos^2\tau}\,d\tau = -\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} \frac{\tan^2\tau}{\cos^2\tau}\,d\tau =$$

$$= \left[-\frac{1}{12}\tan^3\tau\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\tan^3\arccos\frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\frac{\sin^3\arccos\frac{t}{2}}{(\cos\arccos\frac{t}{2})^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\frac{\left(\sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{t}{2}}\right)^3}{\frac{t^3}{8}} == \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\frac{\left(\sqrt{4-t^2}\right)^3}{t^3}.$$

Per tracciare un grafico approssimato della soluzione facciamo alcune osservazioni:

(i) $\lim_{t\to 0+} u(t) = 0$,

(ii) $\lim_{t\to 2-} u'(t) = 0$

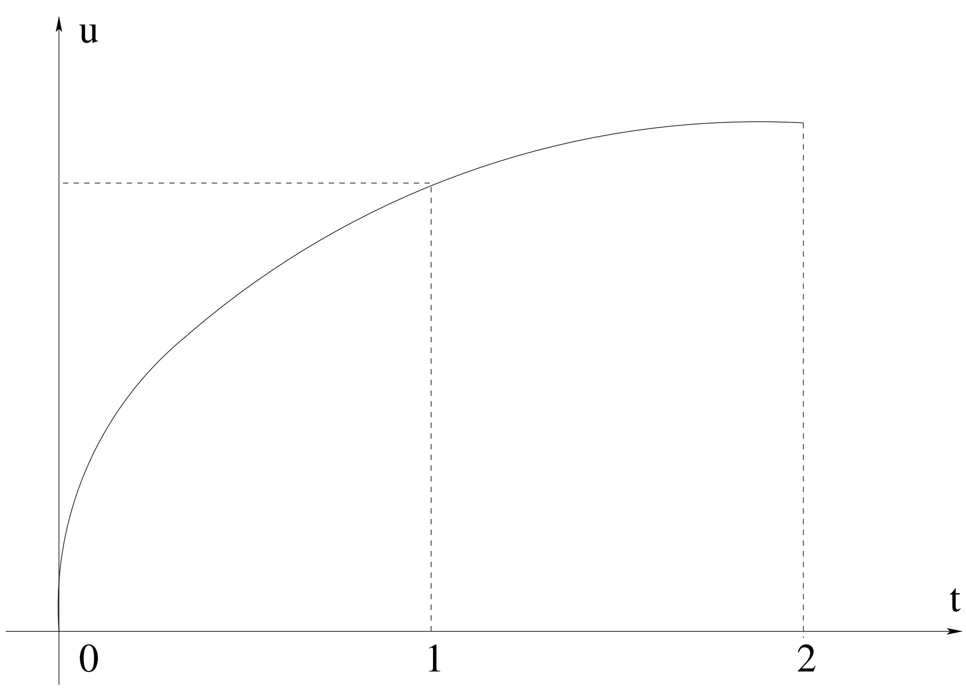
(iii) $\forall t \in (0,2),\ \ u'(t) > 0$ (segue dall'equazione differenziale di partenza),

(iv) $\lim_{t\to 0+} u'(t) = 0$,

quest'ultima viene ottenuta scrivendo la soluzione nella forma

$$u(t) = \frac{12\sqrt[3]{12}t^3}{\sqrt[3]{12}\sqrt{(4-t^2)^3} + 12\sqrt{3}t^3 - 3\sqrt[3]{12}t^3},$$

e sostituendola nell'equazione del problema dipartenza. Il grafico di u avrà in definitiva un andamento del tipo illustrato sotto.



ESERCIZIO 4 (Punti 8+3)

Siano α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Si consideri l'equazione integrale

$$u(t) \;=\; \beta(t) \;+\; \alpha(t) \int_{t_0}^{t} u(s)\; ds. \tag{4}$$

(a) Senza tentare di risolvere l'equazione e supponendo che la soluzione esista dimostrare che essa è continua.

(b) Dimostrare che la soluzione esiste nell'ipotesi che α, β appartengono a $C^1(\mathbb{R})$.

(c)* Se esistono M_1, $M_2 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che per ogni x_1, $x_2 \in [a,b]$ si abbia:

$$|\alpha(t_1) \;-\; \alpha(t_2)| \;\leq\; M_1\,|t_1 - t_2|^c, \qquad |\beta(t_1) \;-\; \beta(t_2)| \;\leq\; M_2\,|t_1 - t_2|^c,$$

dimostrare che esiste $M > 0$ tale che per ogni t_1, $t_2 \in [a,b]$ risulta

$$|u(t_1) \;-\; u(t_2)| \;\leq\; M\; |t_1 - t_2|^c,$$

Svolgimento.

(a) Poiché la soluzione esiste, è definito l'integrale $F(t) \;=\; \int_{t_0}^{t}\; u(s)\; ds$, per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$ ovvero u è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo reale, quindi la funzione integrale è continua. u è allora continua perché somma di funzoni continue.

(b) Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) &= \beta(t) + \alpha(t)v(t) \\ \\ v(t_0) &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

Sappiamo che ammette una ed una soluzione di classe $C^1(\mathbb{R})$.

Osserviamo che se v risolve (5) allora $u(t) = v'(t)$ risolve l'equazione (4). Infatti basta osservare che

$$\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds = v(t) - v(t_0) = v(t),$$

e sostituire.

$(c)^*$

Osserviamo che per ogni t_1, $t_2 \in [a,b]$ risulta

$$|u(t_1) \;-\; u(t_2)| \;\leq\; \left|\beta(t_1) - \beta(t_2) + \alpha(t_1) \int_a^{t_1} u(s)\, ds \;-\; \alpha(t_2) \int_a^{t_2} u(s)\; ds\right| =$$

$$= \left|\beta(t_1) - \beta(t_2) + \alpha(t_1) \int_a^{t_1} u(s)\, ds \;-\; \alpha(t_2) \int_a^{t_1} u(s) ds + \alpha(t_2) \int_a^{t_1} u(s) ds - \;\alpha(t_2) \int_a^{t_2} u(s)\; ds\right| \leq$$

$$\leq |\beta(t_1) - \beta(t_2)| + \left|\alpha(t_1) \int_a^{t_1} u(s)\, ds \;-\; \alpha(t_2) \int_a^{t_1} u(s) ds\right| + \left|\alpha(t_2) \int_a^{t_1} u(s) ds - \;\alpha(t_2) \int_a^{t_2} u(s)\; ds\right| \leq$$

$$\leq |\beta(t_1) - \beta(t_2)| + |\alpha(t_1) \;-\; \alpha(t_2)| \left|\int_a^{t_1} u(s) ds\right| + |\alpha(t_2)| \left|\int_a^{t_1} u(s) ds - \int_a^{t_2} u(s)\; ds\right| \leq$$

$$\leq |\beta(t_1) - \beta(t_2)| + |\alpha(t_1) \;-\; \alpha(t_2)| \left|\int_a^{t_1} |u(s)| ds\right| + |\alpha(t_2)| \left|\int_{t_1}^{t_2} |u(s)| ds\right| \leq$$

$$M_1\; |t_1 - t_2|^c \;+\; M_2\; |t_1 - t_2|^c\,(b-a) \sup_{t\in[a,b]} |u(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|\;\; |t_1 - t_2| \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$$

$$\left[M_1 \;+\; M_2\,(b-a) \sup_{t\in[a,b]} |u(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|\;\; |b-a|^{1-c} \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|\right] |t_1 \;-\; t_2|^c.$$