ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 20/7/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Risolvere il seguente sistema nel campo complesso

$$\begin{cases} 4\,w^5 + \overline{w}\,v^2 = 2\,i\,w^2 \\ |w|\,v = i. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. (Punti 7)

Determinare il valore del parametro reale $\alpha > 0$ affinché esista $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{3+n} - \sqrt[n]{2+n}\right) n^{\alpha} = l.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 7)

Stabilire l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ \\ a_{n+1} = \dfrac{9\,a_n}{25 - a_n^2}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4. (Punti 3+4)
Data l'equazione

$$x^{2n+1} + x - 3 = 0,$$

(a) Si dimostri che ammette una ed una sola radice $x_n > 0$. (non utilizzare le derivate).

(b) Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Esercizio 5 (Punti 5)
Dimostrare l'invertibilitá della funzione $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, la continuità della sua inversa, essendo

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{2}\,x, & x \in [0,1] \\ \\ x\,e^{(x-1)}, & x \in (1,2] \end{cases}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Risolvere il seguente sistema nel campo complesso

$$\begin{cases} 4\,w^5 \,+\, \overline{w}\,v^2 \,=\, 2\,i\,w^2 \\ |w|\,v \,=\, i. \end{cases}$$

Svolgimento.

Ricordando che $|w|^2 \,=\, \overline{w}\,w$, moltiplichiamo per w la prima equazione del sistema ed eleviamo al quadrato la seconda:

$$\begin{cases} 4\,w^6 \,+\, \overline{w}w\,v^2 \,=\, 2\,i\,w^3 \\ \overline{w}w\,v^2 \,=\, -1. \end{cases}$$

Da cui otteniamo

$$4\,w^6 \,-\, 1 \,=\, 2\,i\,w^3 \iff 4\,w^6 \,-2i\,w^3 \,-\, 1 \,=\, 0.$$

Ove posto $z = w^3$, possiamo scrivere

$$4\,z^2 \,-\, 2i\,z \,-1 \,=\, 0$$

che ha soluzioni $z_{1,2} \,=\, \dfrac{i \pm \sqrt{3}}{4}$.

Consideriamo ciascuna delle due radici scrivendo nella forma trigonometrica.

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right), \tag{1}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6}\right), \tag{2}$$

Determiniamo i valori di w calcolando le radici cubiche di z_1 e z_2 :

$$w_{1,2,3} = \sqrt[3]{z_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3} + i\,\sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3}\right),\;\; k=0,1,2\right\}; \tag{3}$$

$$w_{3,4,5} = \sqrt[3]{z_2} = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+k2\pi}{3} + i\,\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+k2\pi}{3}\right),\;\; k=0,1,2\right\}; \tag{4}$$

Da cui

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\,\sin\frac{\pi}{18}\right), \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\,\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\,\sin\frac{25\pi}{18}\right), \quad w_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\,\sin\frac{5\pi}{18}\right),$$

$$w_5 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\,\sin\frac{17\pi}{18}\right), \quad w_6 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\frac{29\pi}{18} + i\,\sin\frac{29\pi}{18}\right).$$

Infine dal sistema deduciamo $v \,=\, \sqrt[3]{2}\,i$. Le soluzioni sono dunque

$$(w_i, v), \quad i = 1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 7)

Determinare il valore del parametro reale $\alpha > 0$ affinché esista $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{3+n} - \sqrt[n]{2+n} \right) n^{\alpha} = l.$$

Svolgimento

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$, per risolvere l'indeterminazione ci riportiamo alla forma seguente

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{n} \log(3+n)} - e^{\frac{1}{n} \log(2+n)} \right) x^{\alpha} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log(2+n)} \left(e^{\frac{1}{n} \log(3+n) - \frac{1}{n} \log(2+n)} - 1 \right) x^{\alpha}$$

Osserviamo che $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log(2+n)} = 1$. Inoltre l'argomento dell'esponenziale contenuto nella parentesi può essere sviluppato come segue:

$$\frac{1}{n} \log(3+n) - \frac{1}{n} \log(2+n) = \frac{1}{n} \left[\log(3+n) - \log(2+n) \right] =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\log(2+n) + \log\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) - \log(2+n) \right] = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n+2}\right) \right] = \frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Perché

$$o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

Tenuto conto degli sviluppi eseguiti sopra, e del principio di sostituzine degli infinitesimi:

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] n^{\alpha} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{n(n+2)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 2 \\ 1 & \text{se} \quad \alpha = 2 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. (Punti 7)

Stabilire l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{9\, a_n}{25 - a_n^2}. \end{cases}$$

Svolgimento.

Facciamo una considerazione preliminare sull'andamento della successione osservando che $a_1 < a_0$, perché

$$a_1 = \frac{27}{16} < a_0 = 3.$$

Questo ci permette di verificare che la succesione è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero che $25 - a_n^2 \neq 0$, osservando che $0 < a_n \leq 3$. Procediamo per induzione

$0 < a_0 \leq 3$, se poi $0 < a_n \leq 3$ allora $0 < a_{n+1} \leq 3$. Infatti, per l'ipotesi induttiva $a_{n+1} > 0$, mentre

$$a_{n+1} = \frac{9\, a_n}{25 - a_n^2} \leq 3.$$

Infatti risolvere questa disequazione ci porta a risolvere la seguente: $a_n^2 + 3a_n - 25 < 0$ che è soddisfatta per l'ipotesi induttiva.
Quando sopra detto ci consente anche di affermare che la succesione è limitata. Per stabilire l'esistenza del limite è sufficiente verificare la monotonia di a_n. Per fare ciò consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{9x}{25 - x^2},$$

quasta risulta monotona crescente nell'intervallo considerato. Infatti

$$0 < x_1 < x_2 \le 3 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \iff \frac{9x_1}{25 - x_1^2} < \frac{9x_2}{25 - x_2^2} \iff (25 - x_2^2)\, 9\, x_1 \, < \, (25 - x_1^2)\, 9\, x_2 \iff$$

$$\iff 225x_1 \, - \, 9x_2^2 x_1 < 225x_2^2 \, - \, 9x_1^2\, x_2 \iff 225 - 9x_2^2 < 225 - 9x_1^2 \iff 0 < x_1 < x_2$$

Nei passaggi sopra abbiamo tenuto conto del fatto che $x_1, \, x_2 \, < \, 3$. Possiamo dimostrare per induzione la monotonia della successione. Abbiamo già osservato che $a_1 < a_0$. Verifichiamo l'induttività:

$$a_n < a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Questo equivale a

$$a_n < a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} = f(a_n) < f(a_{n-1}) = a_n$$

Che è quanto volevamo dimostrare. La successione risulta monotona e limitata. Per il teorema di regolarità delle successioni monotone ammette limite reale l che deduciamo passando al limite nella relazione ricorsiva e risolvento la conseguente equazione:

$$l = \frac{9l}{25 - l^2}$$

Le soluzioni sono $l_1 = 0$, $l_2 = 4$, $l_3 = -4$. Scartiamo le soluzioni $l_2 = 4$ e $l_3 = -4$ in quanto non sono punti di accomulazione per la successione, perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $0 < a_n \le 3$. Il limite è dunque $l_1 = 0$.

ESERCIZIO 4. (Punti 3+4)
Data l'equazione

$$x^{2n+1} \, + \, x \, - \, 3 \, = \, 0,$$

(a) Si dimostri che ammette una ed una sola radice $x_n > 0$. (non utilizzare le derivate).

(b) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Svolgimento.

(a) Per dimostrare che l'equazione data ha soluzioni consideriamo la funzione

$$f(x) = x^{2n+1} \, + \, x \, - \, 3,$$

e osserviamo che ammette zeri positivi. Infatti $f(0) = -3$, $f(2) = 2^{2n+1} - 1 > 0$, inoltre f è continua, quindi per il teorema degli zeri esiste $x_0 \in (0, 2)$ tale che $f(x_0) = 0$.
Verifichiamo l'unicità. A tale scopo basta osservare che f è strettamente crescente. Infatti si ha

$$x_1 < x_2 \iff x_1^{2n+1} < x_2^{2n+1}$$

$$x_1 < x_2 \iff x_1^{2n+1} + x_1 - 3 < x_2^{2n+1} + x_2 - 3 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

(b) Per calcolare il limite, dall'equazione deduciamo

$$x_n^{2n+1} = 3 - x_n \iff x_n = \sqrt[2n+1]{3 - x_n}$$

il termine posto sotto radice è limitato per quanto osservato sopra: $0 < x_n < 2$ equivale a $1 < 3 - x_n < 3$, di conseguenza

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[2n+1]{3 - x_n} = 1$$

e quindi $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Esercizio 5 (Punti 5)
Dimostrare l'invertibilitá della funzione $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, la continuità della sua inversa, essendo

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{2} x, & x \in [0, 1] \\ \\ x\, e^{(x-1)}, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

Svolgimento.
Osserviamo che f è monotona strettamente crescente sull'intervallo $[0, 1]$ perché

$$0 < x_1 < x_2 \leq 1 \iff \sin \frac{\pi}{2} x_1 < \sin \frac{\pi}{2} x_2 \Longrightarrow x_1 \sin \frac{\pi}{2} x_1 < x_2 \sin \frac{\pi}{2} x_1 < x_2 \sin \frac{\pi}{2} x_2.$$

f risulta monotona strettamente crescente anche sull'intervallo $[1, 2]$ perché

$$1 \leq x_1 < x_2 \leq 2 \iff e^{(x_1-1)} < e^{(x_2-1)} \Longrightarrow x_1 e^{(x_1-1)} < x_2 e^{(x_1-1)} < x_2 e^{(x_2-1)}$$

Osserviamo che f risulta monotona strettamente crescente anche sull'intervallo $[0, 2]$, perché per ogni $x \in [0, 1)$ $f(x) < f(1)$, infatti

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{2} x < \sin \frac{\pi}{2} x < \sin \frac{\pi}{2} = 1 = f(1)$$

Mentre per ogni $x \in (1, 2]$ abbiamo

$$f(1) = 1 < x < x e^{(x-1)} = f(x),$$

da cui, per ogni $x_1 \in [0, 1)$ e $x_2 \in (1, 2]$ risulta $f(x_1) < f(1) < f(x_2)$.
f è dunque invertibile.
Risulta anche continua su $[0, 2]$ perché è continua in $[0, 1)$ e $(1, 2]$ in quanto composizione e prodotto di funzioni continue, e

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 1.$$

Essendo poi $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$ abbiamo che $f([0, 2]) = [0, 2]$. Per il teorema che stabilisce che una funzione continua su di un intervallo assume tutti i valori compresi tra il suo massimo ed il suo minimo. f è anche una bigezione tra l'intervallo $[0, 2]$ e l'intervallo $[0, 2]$, sia $f^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$ la sua inversa.
Dal teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua deduciamo che f^{-1} è continua. Infatti il dominio nel nostro caso è sia connesso che compatto, quindi sono applicabilli entrambi i teoremi che abbiamo dimostrato.