ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 1/9/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$\overline{w}^6\, w - 64 = -64\sqrt{3}\, i.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Determinare il valore del parametro reale $\alpha > 0$ affinché esista $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\log\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\right) - \sqrt{\sin\frac{1}{x}}\right] x^\alpha = l.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^3+1} - 1. \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per i quali è ben definita.

(b) Stabilire l'esistenza del limite della successione, ed eventualmente calcolarlo, al variare del parametro reale α.

Esercizio 4 (Punti 8) Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}} & |x| \le 1 \\ \\ \arctan x & |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che f è invertibile su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che f^{-1} è continua su $f(\mathbb{R})$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$\overline{w}^6\, w \,-\, 64 \,=\, -64\sqrt{3}\, i.$$

Svolgimento.

Essendo $w\,\overline{w} = |w|^2$ possiamo scrivere

$$\overline{w}^6\, w \,-\, 64 \,=\, -64\sqrt{3}\, i \iff \overline{w}^5\,\overline{w}\, w \,=\, 64 \,-\, 64\sqrt{3}\, i \iff \overline{w}^5\, |w|^2 \,=\, 64 \,-\, 64\sqrt{3}\, i \tag{1}$$

Uguagliamo i modulo del primo e del secondo membro dell'equazione

$$|\overline{w}^5|\, |w|^2 \,=\, 128 \iff |\overline{w}|^5\, |w|^2 \,=\, 128 \iff |w|^5\, |w|^2 \,=\, 128 \iff |w|^7 \,=\, 128 \iff |w| \,=\, 2.$$

Sostituiamo il modulo di w in (1)

$$\overline{w}^5 \,=\, 16 \,-\, 16\sqrt{3}\, i. \tag{2}$$

Esprimiamo il numero complesso al secondo membro in forma trigonometrica:

$$16 \,-\, 16\sqrt{3}\, i \,=\, 32\left(\frac{1}{2} \,-\, i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \,=\, 32\left(\cos\frac{5}{3}\pi \,+\, i\,\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

Sostituiamo in (2)

$$\overline{w}^5 \,=\, 32\left(\cos\frac{5}{3}\pi \,+\, i\,\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

Data la relazione tra l'angolo di un numero complesso e quello del suo coniugato possiamo scrivere

$$w^5 \,=\, 32\left(\cos\frac{1}{3}\pi \,+\, i\,\sin\frac{1}{3}\pi\right).$$

Applcando la formula per il calcolo delle radici ennesime dei numeri complessi si ha

$$w \in \left\{5\left[\cos\left(\frac{1}{15}\pi + k\frac{2}{5}\pi\right) \,+\, i\,\sin\left(\frac{1}{3}\pi \,+\, k\,\frac{2}{5}\pi\right)\right],\, k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Determinare il valore del parametro reale $\alpha > 0$ affinché esista $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\right) \,-\, \sqrt{\sin\,\frac{1}{x}}\right] x^\alpha \,=\, l.$$

Svolgimento.

Possiamo sviluppare il termine *logaritmo* nel modo seguente

$$\log\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{4}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}\right) = \frac{4}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \,-\, \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Perché
$$\log\left(\frac{1+\frac{4}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}\right)=\log\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\,-\,\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right).$$
Ed inoltre, tenuto conto che in un intorno di $t=0$ possiamo utilizzare lo sviluppo $\log t = t+o(t)$, e che per $x\to+\infty$ risulta $\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0^+$, si ha
$$\log\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)=\frac{4}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
D'altra parte il termine che contiene la funzione *sin* si può trattare nel modo che segue:
$$\sqrt{\sin\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+x\,o\left(\frac{1}{x}\right)}==\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+x\,o\left(\frac{1}{x}\right)+o\left[x\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
Perché
$$\frac{x}{\sqrt{x}}\,o\left(\frac{1}{x}\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\quad\text{mentre}\quad\frac{1}{\sqrt{x}}\,o\left[x\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
In quanto
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x}}\,o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}x\,o\left(\frac{1}{x}\right)=0,\quad\text{mentre}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\,o\left[x\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}o\left[x\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0.$$
Abbiamo anche utilizzato lo sviluppo
$$\sqrt{1+x\,o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+x\,o\left(\frac{1}{x}\right)+o\left[x\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$
perché $\sqrt{1+t}=1+t+o(t)$ per $t\to0+$.
Tornando al limite di partenza:
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}\right)-\sqrt{\sin\frac{1}{x}}\right]x^\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}}=$$
Per il principio di sostituzione degli infinitesimi
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-\frac{1}{2}}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha<\frac{1}{2}\\ 1 & \text{se } \alpha=\frac{1}{2}\\ +\infty & \text{se } \alpha>\frac{1}{2}\end{cases}$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Si consideri la successione
$$\begin{cases}a_0\,=\,\alpha\\ a_{n+1}\,=\,\sqrt{a_n^3+1}\,-\,1.\end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per i quali è ben definita.

(b) Stabilire l'esistenza del limite della successione, ed eventualmente calcolarlo, al variare del parametro reale α.

Determiniamo i valori di α per i quali è possibile definire a_1, ovvero tali che $\alpha^3 + 1 \geq 0$, e quindi $\alpha \geq -1$. Si tratta ora di verificare che se $\alpha \geq -1$ allora per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n \geq -1$. Procediamo per induzione verificando l'induttività della proposizione enunciata (il primo passo è ovviamente verificato). Dimostrare che $a_n \geq -1 \Longrightarrow a_{n+1} \geq -1$ significa dimostrare che $a_n \geq -1 \Longrightarrow \sqrt{a_n^3+1} - 1 \geq -1$ ovvero $a_n \geq -1 \Longrightarrow \sqrt{a_n^3+1} \geq 0$. Questo è verificato in quanto la radice quadrata è non negativa ed il suo argomento per l'ipotesi induttiva è maggiore o uguale a zero (condizione di realtà della radice).

Per stabilire l'esistenza del limite vediamo se la succesione è monotona, per ogni $\alpha \geq -1$ possiamo scrivere:

$$a_0 \leq a_1 \iff \alpha \leq \sqrt{\alpha^3+1} - 1 \iff (\alpha+1)^2 \leq \alpha^3 + 1 = (\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1) \iff \alpha + 1 \leq \alpha^2 - \alpha + 1$$

Da cui $\alpha \geq 2$ oppure $-1 \leq \alpha \leq 0$.
Mentre $a_0 \geq a_1$ se $0 \leq \alpha \leq 2$.
Prima di verificare l'induttività della proposizione consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3+1} - 1,$$

osservando che è monotona strettamente crescente:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \iff \sqrt{x_1^3+1} - 1 < \sqrt{x_2^3+1} - 1 \iff \sqrt{x_1^3+1} < \sqrt{x_2^3+1} \iff x_1^3 < x_2^3.$$

Questo risultato permette di stabilire che se $a_n < a_{n+1}$ allora $f(a_n) < f(a_{n+1})$ e quindi $a_{n+1} < a_{n+2}$. La successione è dunque strettamente crescente se $a_0 < a_1$ cioé se $\alpha > 2$ oppure $-1 < \alpha < 0$. Con considerazioni identiche stabiliamo che la successione è strettamente decrescente se $0 < \alpha < 2$. Se $\alpha = -1$ ovviamente si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -1$ e quindi il limite è -1. Se $\alpha = 0$ ovviamente si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ e quindi il limite è 0. Se infine $\alpha = 2$ si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2$ e quindi il limite è 2.
Sia ora $0 < \alpha < 2$, per quanto osservato sopra si ha che la succesione è decrescente e limitata inferiormente dal valore -1 e quindi ammette limite reale l che detreminiamo risolvendo l'equazione

$$l = \sqrt{l+1} - 1 \iff (l+1)^2 = l^3 + 1 = (l+1)(l^2 - l + 1) \iff l\,(l-2) = 0. \tag{3}$$

Le soluzioni sono $l_1 = 0$ e $l_2 = 2$. La soluzione $l_2 = 2$ si scarta perché la successione è decrescente e $a_0 = \alpha < 2$. Se $-1 < \alpha < 0$ allora essendo la succesione crescente vediamo se è limitate superiormente. Per induzione $a_n < 0$ implica $a_{n+1} < 0$ ovvero $a_n < 0 \Longrightarrow \sqrt{a_n^3+1} - 1 < 0 \iff \sqrt{a_n^3+1} < 1 \iff a_n^3 + 1 < 1 \iff a_n < 0$. La successione ammette dunque limite reale l che si calcola risolvendo l'equazione 3. Anche in questo caso il limite è $l_1 = 0$ perché $l_2 = 2$ non è punto di accumulazione della successione essendo per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n < 0$.
Infine consideriamo il caso $\alpha > 2$. Per quanto stabilito sopra, ovvero la monotonia della successione, questa deve ammettere limite, si quindi tratta di stabilire se esso è finito. Osserviamo che per $\alpha > 2$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 2$ infatti:
$a_n > 2 \Longrightarrow \sqrt{a_n^3+1} - 1 > 2 \iff \sqrt{a_n^3+1} > 3 \iff a_n^3 + 1 > 9 \iff a_n^3 > 8 \iff a_n > 2$.
Di conseguenza se la successione ammette limite finito questo non può essere $l_1 = 0$ perché non è di accumulazione per essa. D'altra parte non puó essere nemmeno $l_2 = 2$, perché a_n è crescente e strettamente maggiore di 2, il limite nel caso $\alpha > 2$ è dunque $+\infty$.

Esercizio 4 (Punti 8) Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{2}} & |x| \leq 1 \\[2ex] \arctan x & |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che f è invertibile su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che f^{-1} è continua su $f(\mathbb{R})$.

Svolgimento.
(a) Osserviamo che f è strettamente crescente sul suo dominio infatti, come è noto, ciascuna delle funzioni *arcsin* e *arctan* sono strettamente crescenti e quindi
$x_1 < x_2 < -1 \Longrightarrow \arctan x_1 < \arctan x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$,
$1 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \arctan x_1 < \arctan x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$,
$-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \Longrightarrow \arcsin \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} < \arcsin \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} \iff f(x_1) < f(x_2)$.
Esaminiamo gli altri casi che si possono presentare.
$x_1 < -1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ perché $\arctan x_1 < \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{4} = \arcsin \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \leq \arcsin x_2$.
$x_1 \leq 1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ perché $\arcsin x_1 \leq \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan x_2$.
Se infine $x_1 < -1 < 1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ per la monotonia della funzione $\arctan$.
Essendo dunque f monotona strettamente crescente si ha, per il teorema di regolarità delle funzioni monotone che esistono i limiti di f per x che tende a $\pm\infty$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{\mathbb{R}} f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_{\mathbb{R}} f.$$

Ma $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.
Possiamo di conseguenza concludere che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Abbiamo visto nel punto precedente che f è strettamente monotona, e quindi iniettiva, allora f è invertibile.
In particolare, per il punto (a), si ha che $Imf = f(\mathbb{R}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, quindi $f^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) f è continua, infatti:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{4} = f(-1), \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{4} = f(1).$$

Nel caso che $x \neq \pm 1$ allora f è continua perché ciascuna delle due funzioni che la definiscono, ossia *arcsin* e *arctan* lo sono sugli intervalli dove sono definite.
Essendo f definitita su tutto $\mathbb{R}$, che è un insieme connesso, si ha che f^{-1} è continua.