ANALISI MATEMATICA I+II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 1/9/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$\overline{w}^6 \, w \, - \, 64 \, = \, -64\sqrt{3}\, i.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) \, = \, 2 \, \sqrt{u(t)} \; \arctan(1+\sqrt{t}) \\ \\ u(0) \, = \, u_0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. (Punti 9)

Si consideri

$$F(x) \, = \, \begin{cases} x^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2} \; dt, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che F è una funzione dispari su $\mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -F(-x)$.

(b) Dimostrare che F è continua su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che F è derivabile su $\mathbb{R}$.

(d) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 0$.

(e) Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha $F(x) < x$.

(f) Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

(g) Tracciare un grafico approssimato di F in un intorno di $x = 0$.

ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x-1)^n \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$\overline{w}^6\, w \,-\, 64 \,=\, -64\,\sqrt{3}\,i. \tag{1}$$

Soluzioni.

$$\overline{w}^6 w - 64 = -64\sqrt{3}\,i \iff \overline{w}^6 w = 64 - 64\sqrt{3}\,i \Longrightarrow |w|^7 = |64 - 64\sqrt{3}\,i| = 128 \Longrightarrow |w| = 2$$

Perché

$$|\overline{w}^6\, w| \,=\, |\overline{w}^6|\,|w| \,=\, |\overline{w}|^6\,|w| \,=\, |w|^6\,|w| \,=\, |w|^7.$$

D'altra parte

$$\overline{w}^6\, w \,=\, \overline{w}^5\,\overline{w}\,w \,=\overline{w}^5\,|w|^2 = 4\overline{w}^5.$$

Possiamo quindi scrivere

$$4\,\overline{w}^5 \,=\, 64 \,-\, 64\,\sqrt{3}\,i \iff \overline{w}^5 \,=\, 16 \,-\, 16\,\sqrt{3}\,i \iff w^5 = 16 \,+\, 16\,\sqrt{3}\,i. \tag{2}$$

Perché $\overline{\overline{w}^5} = w^5$ e $\overline{16 \,-\, 16\,\sqrt{3}\,i} \,=\, 16 \,+\, 16\,\sqrt{3}\,i$. Le soluzioni dell'equazione (1) si determinano calcolando le radici quinte del numero $16 + 16\,\sqrt{3}\,i$. A tale scopo possiamo scrivere questo numero in forma trigonometrica ed applicare la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso.

$$16 \,+\, 16\,\sqrt{3}\,i = 32\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Da cui otteniamo che le radici quinte di $16 \,+\, 16\,\sqrt{3}\,i$, e quindi le soluzioni di (1), sono

$$w_k \,=\, 2\,\left[\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}\right) \,+\, i\,\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}\right)\right],\quad k \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) \,=\, 2\,\sqrt{u(t)}\,\arctan(1+\sqrt{t}) \\ \\ u(0) \,=\, u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Svolgimento.

Osserviamo che posto $B(u) = 2\sqrt{u}$, si ha che $B(u) = 0$ per $u = 0$. Quindi se $u_0 = 0$ una soluzione è, per ogni $t \geq 0$, $u(t) = 0$.
Se $u_0 < 0$ il problema non ha significato perché u compare sotto la radice quadrata. Consideriamo allora solo dati iniziali $u_0 > 0$. In questo caso dall'equazione si deduce che $u'(0) > 0$, u risulta crescente in un intervallo del tipo $(0,\, \delta)$ quindi la radice quadrata in questo intervallo è ben definita. Dall'equazione, per ogni $t \in (0, \delta)$, $u'(t) > 0$. Iterando questo procedimento si ha che la soluzione del problema è ben definita in $[0, +\infty)$.
Possiamo procedere quindi dividendo primo e secondo membro per $B(u(t))$ ed integrando:

$$\int_0^t \frac{u'(\tau)}{2\,\sqrt{u(\tau)}}\,d\tau \,=\, \int_0^t \arctan(1+\sqrt{\tau})\,d\tau \tag{4}$$

Al primo membro, effettuando il cambiamento di variabile $\sigma = u(\tau)$, otteniamo

$$\int_0^t \frac{u'(\tau)}{2\sqrt{u(\tau)}}\, d\tau \;=\; \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\, d\sigma \;=\; \big[\sqrt{\sigma}\big]_{u_0}^{u(t)} = \sqrt{u(t)} \;-\; \sqrt{u_0}. \tag{5}$$

Al secondo membro di (4) si pone invece $s = \sqrt{\tau}$ e poi si integra per parti:

$$\int_0^t \arctan(1+\sqrt{\tau})\; d\tau \;=\; \int_0^{\sqrt{t}} \arctan(1+s)\;\; 2\,s\; ds \;=$$

$$=\; \big[s^2\;\arctan(1+s)\big]_0^{\sqrt{t}} \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} \frac{s^2}{1+(1+s)^2}\, ds \;=$$

$$=\; t\;\arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} \frac{s^2+2s+s^2}{2+2s+s^2}\, dt \;+\; \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2+2s}{2+2s+s^2}\, ds \;=$$

$$=\; t\;\arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} 1\, dt \;+\; \big[\log(2+2s+s^2)\big]_0^{\sqrt{t}} =$$

$$=\; t\;\arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2. \tag{6}$$

Da (5) e (6) segue:

$$\sqrt{u(t)} \;=\; \sqrt{u_0} \;+\; t\;\arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2,$$

ovvero

$$u(t) \;=\; \Big(\sqrt{u_0} \;+\; t\;\arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2\Big)^2.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 9)

Si consideri

$$F(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\;\, dt, & x \neq 0 \\[2ex] 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che F è una funzione dispari su $\mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -F(-x)$.

(b) Dimostrare che F è continua su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che F è derivabile su $\mathbb{R}$.

(d) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 0$.

(e) Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha $F(x) < x$.

(f) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(g) Tracciare un grafico approssimato di F in un intorno di $x = 0$.

Svolgimento.

(a)

$$F(-x) \;=\; (-x)^2 \int_0^{-\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;=\; x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \Big(-\,e^{-(-s)^2}\Big)\; ds \;=\; -\,x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-s^2}\; ds \;=\; -F(x).$$

Nell'integrale sopra abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $t = -s$.

(b) La funzione F risulta continua per ogni $x \neq 0$ perché è il prodotto della funzione continua $g(x) = x^2$ e di $h(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt$. Quest'ultima è la composizione della funzione integrale $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-s^2}\ ds$ e di $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, continua per ogni $x \neq 0$. G risulta continua perché la funzione integranda è continua. In definitiva $h(x) = G(\varphi(x))$ è continua per ogni $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue.

Resta da verificare la continuità in $x = 0$. A tale scopo calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0+} F(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0-} F(x)$, provando che sono entrambi uguali a zero, ovvero a $F(0)$.
Cambiando variabile nel limite si ha

$$\lim_{x\to 0+} F(x) \;=\; \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^{y} e^{-t^2}\ dt \;=$$

Il valore di $\lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int_0^{y} e^{-t^2}\ dt$ coincide con il valore dell'integrale in senso generalizzato $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ che è un valore finito C se la funzione integranda è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $(0, +\infty)$.
Questo è banalmente verificato perché la funzione $t \longrightarrow e^{-t^2}$ risulta continua sulla semiretta $[0, \infty)$, inoltre per ogni $t > 0$ vale

$$0 \,<\, e^{-t^2} \,<\, \frac{1}{t^2}$$

Per il teorema del confronto si ha l'integrabilità perché la funzione $t \longrightarrow \dfrac{1}{t^2}$ è integrabile in s. g. su $[1, +\infty)$.
(Su $[0, 1]$ $t \longrightarrow e^{-t^2}$ è integrabile secondo Riemann.)
Tornando al limite di partenza si ha

$$\lim_{x\to 0+} F(x) \;=\; \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt \;=\; C \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{y^2} \;=\; 0.$$

Con cosiderazioni analoghe si dimostra che $\lim_{x\to 0-} F(x) \;=\; 0$.

(c) Si dimostra che F è derivabile per ogni $x \neq 0$ con considerazioni identiche a quelle fatte nel punto (b), tenendo presente che per il teorema fondamentale del calcolo integrale G è derivabile.
Per quanto riguarda la derivabilità nel punto $x = 0$ si procede calcolando il limite del rapporto incrementale di F ed effettuando un cambiamento di variabile come nel calcolo del limite del punto (b) :

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \;= 0$$

Possiamo allora scrivere

$$F'(x) \;=\; \begin{cases} 2\,x \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \;-\; x^2\, e^{-\frac{1}{x^2}}\ \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\[2ex] 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ovvero

$$F'(x) \;=\; \begin{cases} 2\,x \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \;-\; e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & x \neq 0 \\[2ex] 0, & x = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che F' è continua in $x = 0$ e $F'(0) = 0$. Infatti basta ragionare come nel calcolo del limite effettuato nel punto (b).

(d) Iniziamo col dimostrare che se $x > 0$ allora

$$2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{7}$$

Osserviamo che la funzione $t \to e^{-t^2}$ è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$ e quindi per ogni $t \in \left(0, \dfrac{1}{x}\right)$ il suo valore risulta maggiore di quello assunto sul secondo estremo, ovvero per ogni $t \in \left(0, \dfrac{1}{x}\right)$

$$e^{-t^2} \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Tenuto conto di questo e della monotonia dell'integrale:

$$2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ > \ 2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dt \ = \ 2\,x\,\frac{1}{x}\,e^{-\frac{1}{x^2}} \ = \ 2\,e^{-\frac{1}{x^2}} \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{8}$$

Se invece $x < 0$ la funzione $t \to e^{-t^2}$ è strettamente crescente su $(-\infty, 0)$ e quindi per ogni $t \in \left(\dfrac{1}{x}, 0\right)$ il suo valore risulta maggiore di quello assunto sul primo estremo, ovvero per ogni $t \in \left(\dfrac{1}{x}, 0\right)$

$$e^{-t^2} \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$2\,x \int_{\frac{1}{x}}^{0} e^{-t^2}\ dt \ < \ 2\,x \int_{\frac{1}{x}}^{0} e^{-\frac{1}{x^2}}\,dt \ = \ 2\,x\,\frac{-1}{x}\,e^{-\frac{1}{x^2}} \ = \ -2\,e^{-\frac{1}{x^2}} \ < \ -e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{9}$$

Da cui per ogni $x < 0$

$$-2\,x \int_{\frac{1}{x}}^{0} e^{-t^2}\ dt \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}} \iff 2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ > \ e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{10}$$

(e) Sia $x > 0$, allora

$$x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ < \ x \iff \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ < \ \frac{1}{x},$$

Essendo poi per ogni $t \neq 0$ $e^{-t^2} < 1$, per la monotonia dell'integrale si ha per ogni $x > 0$

$$\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ < \ \int_0^{\frac{1}{x}} 1\ dt \ < \ \frac{1}{x}.$$

(f) Osserviamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Infatti

$$F(x) = x\ \frac{1}{\frac{1}{x}} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt$$

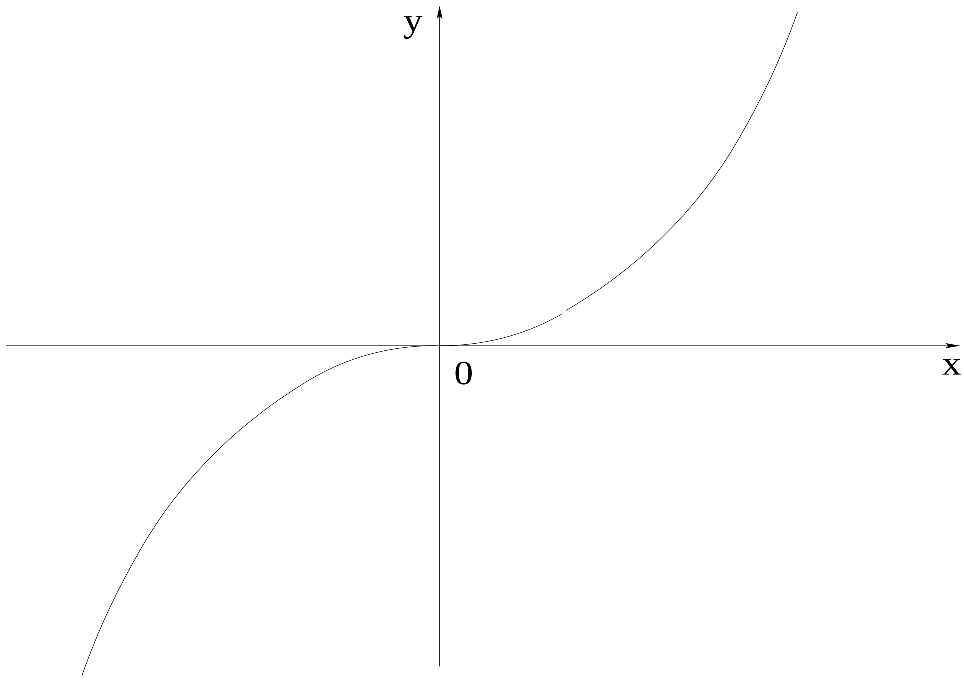
Ponendo $s = \dfrac{1}{x}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt \ = \ \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int_0^{s} e^{-t^2}\ dt \ = \ e^0 \ = \ 1$$

(g) Osserviamo che per ogni $x \neq 0$

$$F''(x) \;=\; 2 \int_0^{\frac{1}{x}} \;\; e^{-t^2} \;\, dt \;-\; 2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \;\left(\frac{1}{x} \;-\; \frac{1}{x^3} \right).$$

Procedendo in maniera analoga a quella vista sopra si stabilisce che $\lim\limits_{x \to 0+} F''(x) > 0$, quindi in un intorno destro di $x = 0$. F'' risulta positiva e quindi F è convessa in tale intorno. Per il fatto che la funzione è dispari da questo segue anche che la funzione è concava in un intorno sinistro di $x = 0$.
Il grafico è dunque il seguente.



ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x-1)^n \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

Svolgimento.
Studiamo la convergenza assoluta della serie considerando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x-1|^n \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Esendo questa una serie a termini non negativi possiamo appilcare il criterio della radice ennesima.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x-1|^n \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}} = |x-1|,$$

perché

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}} = 1,$$

essendo per ogni $n \geq 2$

$$1 < \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}}} < \sqrt[n]{n},$$

mentre

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{1}{\sqrt{n+3}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n+3}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n+3}}} = 1,$$

perché

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+3}} < \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n+3}}} < 1,$$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+3} = 1$.

Possiamo dunque affermare che, per il criterio della radice ennesima, la serie converge assolutamente, e quindi converge, per $|x-1| < 1$. Il medesimo criterio ci consente di stabilire che se $x-1 > 1$, essendo in questo caso $|x-1| = x-1$ (quindi a termini positivi) la serie diverge. Esaminiamo gli altri casi.

Sia $x-1 = 1$, ovvero $x = 2$, la serie data diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \sin\frac{1}{\sqrt{n+3}}. \tag{11}$$

Osserviamo che essendo

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) \tag{12}$$

la serie (11) si comporta come la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \frac{1}{\sqrt{n+3}}, \tag{13}$$

che ha lo stesso andamento della seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Che diverge, quindi per il criterio del confronto asintotico, la serie (11) diverge. Verifichiamo ora le affermazioni che abbiamo fatto applicando il criterio del confronto asintotico. La serie (11) si comporta come la serie (13):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \sin\frac{1}{\sqrt{n+3}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{n+3}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)\right]} = 1.$$

La serie (13) si comporta come la serie (14):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \frac{1}{\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Sia ora $x-1 = -1$, ovvero $x = 0$. La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \sin\frac{1}{\sqrt{n+3}}. \tag{15}$$

Si tratta di una serie a termini di segno alterno. Possiamo applicare il criterio di Leibniz e stabilire che converge. Infatti si verifica facilmente che la successione

$$a_n \; = \; \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}} \tag{16}$$

è decrescente ed infinitesima.
Se infine $x-1<-1$, ovvero $x<0$, la serie si può scrivere:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \; |x-1|^n \; \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}. \tag{17}$$

Questa è a termini di segno alterno, ma la successione

$$a_n \; = \; |x-1|^n \; \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n+n^2}} \;\; \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}} \tag{18}$$

non è infinitesima (tende a $+\infty$) e quindi la serie (17) è indeterminata.
Riassumendo:

$$\begin{cases} \text{se} & x \geq 2 & \text{la serie diverge} \\ \text{se} & 0 \leq x < 2 & \text{la serie converge} \\ \text{se} & x < 0 & \text{la serie è indeterminata.} \end{cases}$$