ANALISI MATEMATICA II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta intermedia del 3/6/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 6)
(a) Dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5\, n! + 4^n}.$$

(b) Stabilire, al variare del parametro reale x, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+3}.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 6)
Risolvere l'equazione differenziale

$$u''(t) \;+\; 4\,u'(t) \;-\; 5\,u(t) \;=\; e^t.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) \;-\; (\tan t)\; u(t) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{(1+\sin t)^3} \;-\; 8} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Stabilire su quale intervallo ammette esistenza ed unicità di soluzione.

(b) Determinare la soluzione.

ESERCIZIO 4. (Punti 10)
Determinare, al variare del parametro reale u_0, le soluzioni del seguente problema di Cauchy e tracciarne il grafico.

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; -\; \dfrac{u^2(t) \;-\; 3\,u(t) \;+\; 2}{t\,+\,1}, \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. (Punti 3)
Dimostrare che la soluzione del seguente problema di Cauchy risulta simmetrica rispetto al punto $t = 0$ e positiva per ogni $t \neq 0$.

$$\begin{cases} u''(t) \,+\, e^{-t^2}\, u(t) \;=\; 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

ESERCIZIO 1. (Punti 6)
(a) Dimostrare la convergenza della serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5\; n! + 4^n}.$$

Soluzione.

I termini della serie sono positivi, possiamo quindi applicare il criterio del confronto:

$$\frac{2^n + 3^n}{5\; n! + 4^n} \leq \frac{2 \cdot 3^n}{n!}.$$

Osserviamo che $\dfrac{2 \cdot 3^n}{n!}$ è il termine generale di una serie convergente. Infatti, applicando il criterio dell rapporto, otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2 \cdot 3^n}{n!}} = \lim_{\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

(b) Stabilire il comportamento della seguente serie al variare del parametro reale x.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+3}.$$

Soluzione.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+3}$ non è a termini di segno costante. Iniziamo con l'applicare il criterio della convergenza assoluta considerando

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-1|^n}{2n+3}$$

ed applicando ai suoi termini il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{2n+3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x-1|}{\sqrt[n]{2n+3}} = |x-1|.$$

Di conseguenza se $|x-1| < 1$, ovvero $0 < x < 2$, la serie *converge assolutamente* è quindi converge. Consideriamo gli altri casi.
Se $x = 2$, otteniamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+3}$, che diverge, perché si tratta di una serie i cui termini si possono minorare, per ogni $n \geq 1$, con i termini di una serie armonica con esponente 1, e quindi è divergente:

$$\frac{1}{5n} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Se $x > 2$, la serie è divergente perché, essendo i termini positivi, possimo di nuovo applicare il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(x-1)^n}{2n+3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt[n]{2n+3}} = x-1 > 1.$$

Se $x = 0$ otteniamo la serie a termini di segno alterno: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3}$, che è convergente in quanto il suo termine generale verifica le ipotesi del *teorema di Leibniz*, infatti la successione $\left\{\dfrac{1}{2n+3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima.
Se $x < 0$, osserviamo che la serie è a termini di segno alterno in quanto possiamo scrivere $\dfrac{(x-1)^n}{2n+3} = (-1)^n \dfrac{|x-1|^n}{2n+3}$, ma in questo caso non sono verificate le condizioni del teorema di *Leibniz* e quindi è indeterminata. Infatti $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x-1|^n}{2n+3} = +\infty$, perché $|x-1| > 1$.

ESERCIZIO 2. (punti 6)
Risolvere la seguente equazione differenziale.

$$u''(t) \ + \ 4\,u'(t) \ - \ 5\,u(t) \ = \ e^t.$$

Svolgimento.
L'equazione proposta è a coefficienti costanti, possiamo utilizzare il polinomio caratteristico per determinare una base di soluzioni dell'equazione omogenea associata.

$$\lambda^2 \ + \ 4\,\lambda \ - \ 5 \ = \ 0.$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -5$, di conseguenza le funzioni $u_1(t) = e^t$ e $u_2(t) = e^{-5t}$ costituiscono una base di soluzioni dell'equazione omogenea.
Essento il coefficiente dell'argomeno dell'esponenziale al secondo membro uguale ad una radice dell'equazione del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $u(t) \ = \ A\,t\,e^t$.
Quindi $u'(t) = A(e^t + te^t)$ e $u''(t) = A(2e^t + te^t)$. Sostituendo

$$A2e^t + Ate^t + 4Ae^t + 4Ate^t - 5A\,t\,e^t = e^t \iff 6Ae^t = e^t \iff A = \frac{1}{6}.$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione è dato da

$$\{\,C_1\,e^t \ + \ C_2\,e^{-5t} \ + \ \frac{1}{6}\,t\,e^t, \ \ C_1,\,C_2 \in \mathbb{C}\}.$$

ESERCIZIO 3. (punti 8)
Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) \ - \ (\tan t)\ u(t) \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{(1+\sin t)^3} \ - \ 8} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Stabilire su quale intervallo ammette esistenza ed unicità di soluzione.

(b) Determinare la soluzione.

Svolgimento.
(a) Osserviamo che il coefficiente del termine $u(t)$ è definito e continuo sull'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ che contiene il punto $t = 0$. Mentre il termine al secondo membro è definito e continuo sull'intervallo $\left(-3\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ che contiene $t = 0$. Ci sarà dunque una ed una soluzione u di classe C^1 sull'intersezione dei due intervalli.
(b) Determiniamo u mediante la formula risolutiva

$$u(t) = \; e^{\int_0^t \tan s ds} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(1+\sin s)^3 \, - \, 8}} \; e^{-\int_0^s \tan\tau \, d\tau} \; ds.$$

Osserviamo che, per quanto detto nel punto (a), deve essere $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi

$$-\int_0^t \tan s \; ds = \log|\cos t| = \log\cos t.$$

$$u(t) = \; \frac{1}{\cos t} \int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{(1+\sin s)^3 \, - \, 8}} \;\; ds.$$

Per risolvere l'integrale poniamo $w = \sin s$,

$$\int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{(1+\sin s)^3 \, - \, 8}} \;\; ds \; = \; \int_0^{\sin t} \frac{1}{\sqrt{(1+w)^3 \, - \, 8}} \;\; dw.$$

Poniamo $1 + w = z^2$:

$$\int_0^{\sin t} \frac{1}{\sqrt{(1+w)^3 \, - \, 8}} \;\; dw \; = \; \int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{2\; z}{z^3 - 8} \; dz.$$

Dalla scomposizione

$$\frac{2z}{z^3 - 8} \; = \; \frac{A}{z-2} \; + \; \frac{Bz + C}{z^2 + 2z + 4},$$

ricaviamo:

$$\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{2\; z}{z^3 - 8} \; dz \; = \; \int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{3}\frac{-z+2}{z^2+2z+4} \right) dz.$$

Da cui

$$\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{2\; z}{z^3 - 8} \; dz \; = \; \frac{1}{3}\left[\log|z-2|\right]_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; + \; \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{-z+2}{z^2+2z+4} \; dz.$$

Inoltre

$$\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{-z+2}{z^2+2z+4} \; dz = -\frac{1}{6}\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{2z+2}{z^2+2z+4} \; - \; \frac{6}{z^2+2z+4} \, dz =$$

$$= \left[-\frac{1}{6} \; \log|z^2+2z+4|\right]_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; + \; \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{1+\sin t}} \; \frac{1}{1+\left(\frac{z+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \; \frac{1}{\sqrt{3}} \, dz =$$

$$= \left[-\frac{1}{6} \; \log|z^2+2z+4| \; + \; \frac{1}{\sqrt{3}} \; \arctan\left(\frac{1+z}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{\sqrt{1+\sin t}}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$u(t) = \frac{1}{\cos t}\left[\frac{1}{3}\log(2-\sqrt{1+\sin t}\,) - \frac{1}{6}\log(5+\sin t\,+\,2\sqrt{1+\sin t}\,) + \frac{1}{6}\log 7 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$

ESERCIZIO 4. (Punti 10)
Determinare al variare del parametro reale u_0 le soluzioni del seguente problema di Cauchy e tracciarne il grafico.

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; -\dfrac{u^2(t)\;-\;3\,u(t)\;+\;2}{t\,+\,1}, \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Svolgimento.

Poniamo: $A(t) = -\dfrac{1}{t+1}$ e $B(u) = u^2(t) - 3\,u(t) + 2$. Per prima cosa osserviamo che essendo $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ radici dell'equazione $B(u) = 0$, si avrà che se $u_0 = 1$ allora la funzione $u(t) = 1$ è soluzione per ogni $t > -1$, mentre se $u_0 = 2$ la funzione $u(t) = 2$ è soluzione per ogni $t > -1$. Tenuto poi conto del teorema sulle equazioni differenziali a variabili separabili, se $1 < u_0 < 2$ esiste una ed una sola soluzione sull'intervallo $(-1, +\infty)$,
Se $u_0 > 2$ oppure $u_0 < 1$ le soluzioni esisteranno su un intervallo contenuto in $(-1, +\infty)$.
Procediamo al calcolo delle soluzioni.

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)\;-\;3\,u(s)\;+\;2}\,ds \;=\; -\int_0^t \frac{1}{s+1}\ ds \iff \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sigma^2\;-\;3\,\sigma\;+\;2}\,d\sigma \;=\; -\log(t+1). \tag{1}$$

Osserviamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sigma^2 - 3\sigma + 2}\,d\sigma = \int_{u_0}^{u(t)} \left(\frac{A}{\sigma\,-\,1} + \frac{B}{\sigma\,-\,2}\right) d\sigma \;=\; \int_{u_0}^{u(t)} \left(\frac{-1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma - 2}\right) d\sigma.$$

Da cui

$$\int_{u_0}^{u(t)} \left(\frac{-1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma - 2}\right) d\sigma \;=\; -\log|u(t) - 1| + \log|u(t) - 2| + \log|u_0 - 1| - \log|u_0 - 2|.$$

Tenuto conto di (1), le soluzioni del problema di Cauchy dato sono definite implicitamente dall'equazione

$$-\log|u(t) - 1| + \log|u(t) - 2| + \log|u_0 - 1| - \log|u_0 - 2| = \log\frac{1}{t+1}. \tag{2}$$

Sia $1 < u_0 < 2$. La soluzione deve essere compresa tra 1 e 2, quindi l'equazione (2) diventa

$$\log\left(\frac{2 - u(t)}{u(t) - 1}\right)\left(\frac{u_0 - 1}{2 - u_0}\right) = \log\frac{1}{t+1}.$$

Da cui, posto $C_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2 - u_0}$, si ha

$$\frac{2 - u(t)}{u(t) - 1}\,C_0 \;=\; \frac{1}{t+1}$$

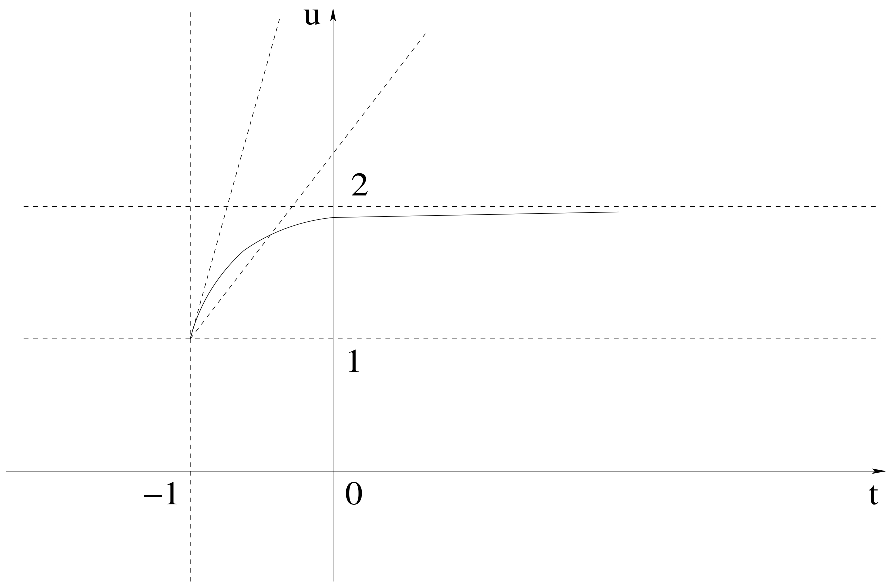
e quindi

$$u(t) \;=\; \frac{2C_0 + 1 + 2C_0\, t}{C_0 + 1 + tC_0}$$

Osserviamo che

$$u'(t) = \frac{C_0}{(C_0 + 1 + tC_0)^2}, \quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = 2, \quad \lim_{t\to-1^+} u(t) = 1,$$

da cui, per ogni $t > -1$, risulta $u'(t) > 0$ e $\lim_{t\to-1^+} u'(t) = C_0$, possiamo tracciare il seguente grafico approssimato della soluzione.



Sia $u_0 > 2$. Da (2) otteniamo l'equazione seguente che definisce implicitamente la soluzione del problema

$$\frac{u(t)-2}{u(t)-1}\;\frac{u_0-1}{u_0-2} = \frac{1}{t+1}.$$

Da cui posto $C_1 = \dfrac{u_0-1}{u_0-2}$, abbiamo

$$\frac{u(t)-2}{u(t)-1}\; C_1 = \frac{1}{t+1}.$$

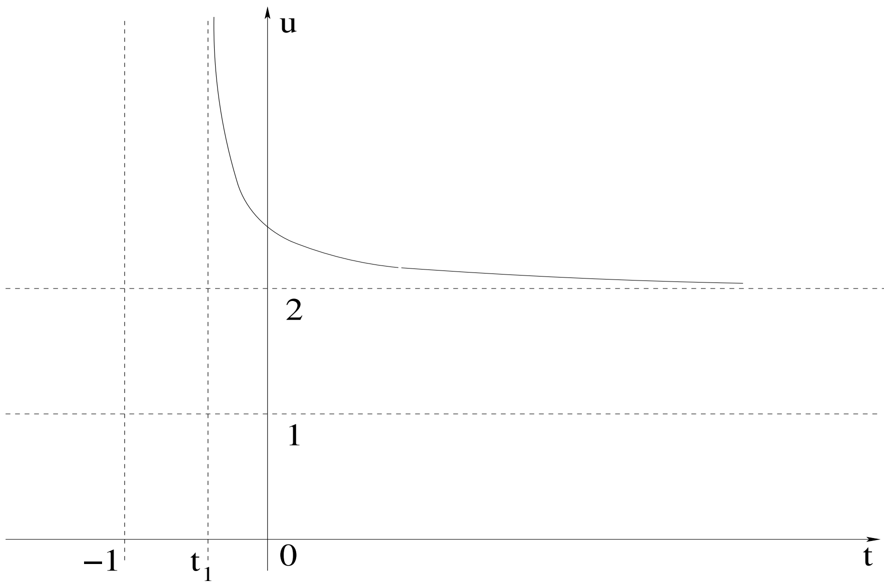
La soluzione del problema è quindi

$$u(t) \;=\; \frac{1 - 2C_1 - 2C_1\, t}{1 - C_1 - C_1 t}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2,$$

ed inoltre u è definita per $t > \dfrac{1-C_1}{C_1} = t_1$. Risulta $-1 < t_1 < 0$ e $\lim_{t\to t_1^+} u(t) = +\infty$, mentre, dall'equazione $u'(t) < 0$, per ogni $t > t_1$. Possiamo tracciare il seguente grafico approssimato della soluzione.



Sia $u_0 < 1$. Da (2) otteniamo l'equazione seguente che definisce implicitamente la soluzione del problema

$$\frac{2-u(t)-2}{1-u(t)}\ \frac{1-u_0}{2-u_0} = \frac{1}{t+1}.$$

Da cui posto $C_2 = \dfrac{1-u_0}{2-u_0}$, abbiamo

$$\frac{2-u(t)}{1-u(t)}\ C_2 = \frac{1}{t+1}.$$

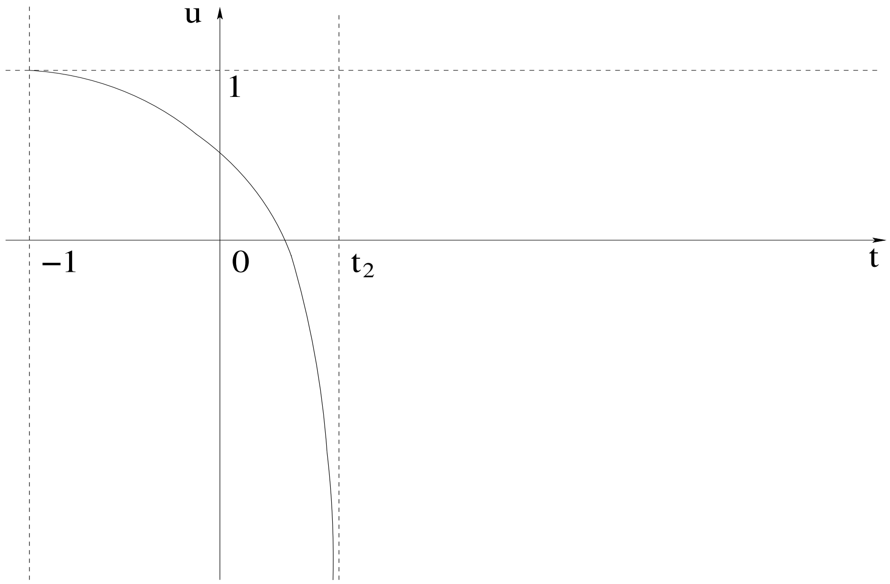
La soluzione del problema è quindi

$$u(t)\ =\ \frac{2C_2 - 1 + 2C_2\, t}{C_2 - 1 + C_2 t}$$

Osserviamo che

$$\lim_{t\to -1^+} u(t) = 1,$$

ed inoltre u è definita per $-1 < t < \dfrac{1-C_2}{C_2} = t_2$. Risulta $t_2 > 0$ e $\lim\limits_{t\to t_2^-} u(t) = -\infty$, mentre, dall'equazione $u'(t) < 0$, per ogni $-1 < t < t_2$. Mentre $1 < u(0) < 1$ perché $C_2 < \dfrac{1}{2}$. Possiamo tracciare il seguente grafico approssimato della soluzione.



ESERCIZIO 5. (Punti 3)
Dimostrare che la soluzione del seguente problema di Cauchy risulta simmetrica rispetto al punto $t = 0$ e positiva per ogni $t \neq 0$.

$$\begin{cases} u''(t) \, + \, e^{-t^2} \, u(t) \, = \, 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento.

Osserviamo che posto $v(t) = u(-t)$, risulta: $v'(t) = -u'(-t)$ e $v''(t) = u''(-t)$. Sostiuendo la funzione v sopra osserviamo che risolve il problema di Cauchy assegnato, quindi per l'unicità di soluzione deve essere per ogni $t \in \mathbb{R} : v(t) = u(t)$ e quindi $u(-t) = u(t)$.
Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $u'(t)$ ottenendo

$$u''(t)\, u'(t) \, + \, e^{-t^2} \, u(t)\, u'(t) \, = \, u'(t) \iff \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u'(t)]^2 + e^{-t^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u(t)]^2 = u'(t)$$

Integriamo tra 0 e t, con $t > 0$, si ha

$$\frac{1}{2} [u'(t)]^2 \, + \, \frac{1}{2} \int_0^t e^{-s^2} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} [u(s)]^2 \, ds = u(t)$$

Integrando per parti

$$\frac{1}{2} [u'(t)]^2 \, + \, \frac{1}{2} \, e^{-t^2} [u(t)]^2 \, + \int_0^t \, s e^{-s^2} [u(s)]^2 \, ds = u(t) \tag{3}$$

Concludiamo osservando che il primo membro è costituito da termini positivi (non può esistere un intervallo in cui $u = 0$, perchè la soluzione nulla non risolve l'equazione) e quindi per ogni $t > 0$ risulta $u(t) > 0$. Per la simmetria rispetto all'origine si ha $u(t) > 0$ anche per ogni $t < 0$.