Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 24 luglio 2018

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 5) Calcolare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$\frac{z - 5}{3\overline{z} - 2} = \overline{z}.$$

2. (Punti 9 Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5\,n^4 \log n - \arctan n^2) \sin \frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}} \log^3(n+2)}.$$

3. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log x^2 - \log|x-2|,$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

4. (Punti 7) Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4x+1} + 2\sqrt[4]{4x+1}}\, dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 5) Calcolare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$\frac{z \, - \, 5}{3\overline{z} \, - \, 2} \, = \, \overline{z}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che $z = \frac{2}{3}$ non é soluzione. L'equazione puó essere scritta quindi nella forma

$$z - 5 = 3\,\overline{z}^2 \, - \, 2\,\overline{z}.$$

Poniamo $z = x + iy$ e sostiuiamo nell'equazione

$$x + iy - 5 = 3(x^2 - y^2 - 2ixy) - 2x + 2iy \quad \Longleftrightarrow \quad x - 5 + iy = 3x^2 - 3y^2 - 2x + (-6xy + 2y).$$

Eguagliamo la parte reale e la parte immaginaria del primo membro rispettivamente con parte reale e parte immaginaria del secondo ottenendo il sistema con incognite x, $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - 5 = 3x^2 - 3y^2 - 2x \\ \\ y = -6xy + 2y \end{cases}$$

Consideriamo la seconda equazione. Se $y = 0$ allora la prima diventa $3x^2 - 3x + 5 = 0$ che non ha soluzioni reali dato che il suo Δ risulta minore di zero. Sia $y \neq 0$, dividiamo primo e secondo membro per y ottenendo l'equazione: $1 = -6x + 2$, che fornisce $x = \frac{1}{6}$. Sostituiamo questo valore nella prima equazione del sistema $y^2 = \frac{55}{36}$, da cui $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{55}}{6}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$z_{1,2} = \frac{1}{6} \, \pm \, i\,\frac{\sqrt{55}}{6}.$$

2. (Punti 9 Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5\,n^4 \, \log\, n \, - \, \arctan n^2) \sin\, \frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}} \, \log^3(x+2)}.$$

Svolgimento.

Scriviamo la serie data come somma di serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5\,n^4 \, \log\, n \, - \, \arctan n^2) \sin\, \frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}} \, \log^3(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5\,n^4 \, \log\, n \, \sin\, \frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}} \, \log^3(n+2)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n^2 \, \sin\, \frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}} \, \log^3(n+2)}.$$

Si tratta di due serie a termini positivi, se $n \geq 2$, possiamo applicare alla prima di esse il *criterio del confronto* mettendola in relazione con la serie convergente([1])

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log^2 n},$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5\,n^4\,\log\,n\,\sin\,\frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}}\,\log^3(n+2)}\,(n^2\log^2 n) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{5\,n^4\,\log\,n\,\left[\frac{7}{n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right]}{\log^3(n+2)}\,(n^2\log^2 n) \;=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\,n\,\left[\frac{35}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\log^3(n+2)}\,(n^2\log^2 n) \;=\; 35.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5\,n^4\,\log\,n\,\sin\,\frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}}\,\log^3(n+2)}$$

converge. Anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n^2\,\sin\,\frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}}\,\log^3(n+2)}.$$

é convergente perché il suo termine generale si maggiora, per ogni $n \geq 2$, con quello di una serie armonica

$$\frac{\arctan n^2\,\sin\,\frac{7}{n^6}}{e^{\frac{2}{n^2}}\,\log^3(n+2)} \leq \frac{7\,\pi}{2}\,\frac{1}{n^6}.$$

In definitiva la serie data risulta convergente in quanto differenza di serie convergenti.

3. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \log x^2 \;-\; \log|x-2|,$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

---

[1] Infatti, per ogni $n \geq 3$, vale la maggiorazione

$$\frac{1}{n^2\,\log^2 n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ricordiamo che la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge avendo esponente maggiore di uno.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione é $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Utilizzando le proprietá del logaritmo possiamo scrivere

$$f(x) = \log \frac{x^2}{|x-2|}.$$

Risulta $f(x) \geq 0$ se l'argomento del logaritmo é maggiore o uguale ad uno:

$$\frac{x^2}{|x-2|} \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 \geq |x-2|,$$

da cui seguono, dopo aver esplicitato il modulo, le disequazioni

$$x^2 \geq x-2, \text{ se } x > 2, \text{ mentre se } x < 2, \text{ risulta } \ x^2 \geq 2-x.$$

Ovvero

$$x^2 - x + 2 \geq 0, \text{ se } x > 2, \qquad x^2 + x - 2 \geq 0, \text{ se } x < 2.$$

La prima ha soluzioni per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi per ogni $x > 2$. La seconda ha soluzioni $x \leq -2$ o $x \geq 1$, di conseguenza per ogni $x \leq -2$ oppure per ogni $x \in [1, 2)$.
Scriviamo l'espressione della funzione nella forma

$$f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{x^2}{x-2}, & x > 2 \\ \\ \log \dfrac{x^2}{2-x}, & x < 2, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = +\infty.$$

Inoltre non ci sono asintoti obliqui dato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Determiniamo gli intervalli di monotonia calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{x(x-2)}, & x > 2 \\ \\ \dfrac{x-4}{x(x-2)}, & x < 2, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Da cui deduciamo che se $x > 2$ allora $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 4$, $f'(x) \leq 0$ per $x \leq 4$. Quindi f é crescente su $[4 + \infty)$, decrescente su $(2, 4]$. Il punto $x = 4$ é di minimo relativo.
Invece se $x < 2$ e $x \neq 0$ allora $f'(x) > 0$ per $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$. Quindi f é crescente su $(0, 2)$, decrescente su $(-\infty, 0)$.

Determiniamo ora gli intervalli di concavitá e di convessitá.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+8x-8}{x^2(x-2)^2}, & x > 2 \\ \\ \dfrac{-x^2+8x-8}{x^2(x-2)^2}, & x < 2, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Poiché $-x^2 + 8x - 8 > 0$ per $4 - 2\sqrt{2} < x < 4 + 2\sqrt{2}$, ed essendo il denominatore sempre positivo, deduciamo che $f''(x) > 0$ se $4 - 2\sqrt{2} < x < 2$ e $2 < x < 4 + 2\sqrt{2}$. La funzione risulta allora convessa su $(4 - 2\sqrt{2}, 2)$ e su $(2, 4 + 2\sqrt{2})$, concava su $(-\infty, 0)$, $(0, 4 - 2\sqrt{2})$, $(4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.
I punti $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$ e $x_2 = 4 + 2\sqrt{2}$ sono di flesso.
Possiamo ora tracciare il grafico di f.

4. (Punti 7) Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4x+1} \, + \, 2\sqrt[4]{4x+1}} \ dx.$$

Svolgimento.

Effettuiamo un cambio di variabile ponendo $4x + 1 = t^4$, da cui $dx = t^3 \, dt$. Per $x = 0$ risulta $t = 1$, mentre se $x = \frac{1}{2}$ allora $t = \sqrt[4]{3}$. Possiamo quindi scrivere

$$\int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{t^3}{t^2 + 2t} \ dt \ = \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{t^2 - 4 + 4}{t + 2} \ dt \ = \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{t^2 - 4}{t + 2} \ + \ \frac{4}{t + 2} \, dt \ =$$

$$= \int_1^{\sqrt[4]{3}} (t - 2) \ dt \ + \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{4}{t + 2} \, dt \ = \left[\frac{1}{2} t^2 \ - \ 2t \right]_1^{\sqrt[4]{3}} \ + \ 4 \ [\log |t + 2|]_1^{\sqrt[4]{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \ - \ 2\sqrt[4]{3} \ + \ \frac{3}{2} \ + \ 4 \log(\sqrt[4]{3} + 2) \ - \ \log 81.$$