Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 22 febbraio 2018

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 7) Studiare il comportamento della successione e calcolarne il limite

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{a_n^2}{a_n+5}, \\ a_0 &= 1. \end{cases}$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x+1|}}$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 9) Calcolare

$$\int \frac{1}{(x+2)\,x\,\sqrt{x}}\;dx.$$

4. (Punti 5) Determinare la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} u''(t) - 4\,u'(t) + 13\,u(t) = 5\,t, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1.

Svolgimento.

Si vede facilmente per induzione che la successione é positiva. Infatti $a_0 > 0$. Se $a_n > 0$ allora $a_n + 5 > 0$ e quindi $a_{n+1} > 0$. Questo implica non solo che la successione é ben definita in quanto il denominatore non si annulla mai, ma anche che é limitata inferiormente.
Per studiare la monotonia consideriamo la funzione associata

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x+5}.$$

Risulta che

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2} > 0$$

per cui f é crescente su $(-\infty, -5)$ e $(-5, +\infty)$. In particolare f cresce su $(0, +\infty)$.
Osserviamo che $a_0 = 1 > a_1 = \frac{1}{6} > a_2 = \frac{1}{186}$. Questo ci fa supporre ipotizzare che la successione sia monotona decrescente. Verifichiamo ció per induzione utilizzando quanto stabilito per la funzione associata ad essa. Il primo passo, come abbiamo visto, é vero $a_0 > a_1$. Per quanto riguarda l'induttivitá $a_n < a_{n-1}$ implica $a_n < a_{n+1}$, segue per il fatto che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che f cresce sulla semiretta $(0, +\infty)$. Per questo é valida l'implicazione

$$a_{n-1} > a_n \implies f(a_{n-1}) > f(a_n) \iff a_n > a_{n+1}.$$

Essendo la successione limitata inferiormente essa ammette limite $L \in \mathbb{R}$ che determiniamo risolvendo

$$L = \frac{L^2}{L+5} \iff L^2 + 5L = L^2 \iff L = 0.$$

Quindi la successione data ammette limite $L = 0$.

Esercizio 2.

Il campo di esistenza di f é dato dall'insieme dei valori di x diversi da -1. Il comportamento della funzione nell'intorno di questo punto é stabilito dal limite

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

Perché assume la forma $e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty}$.
Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{e}.$$

La retta $y = \frac{1}{e}$ é un asintoto di f per x che tende a $-\infty$, mentre la retta $y = e$ é un asintoto di f per x che tende a $+\infty$.
La funzione é positiva sul suo campo di esistenza.
Possiamo esplicitare il valore assoluto contenuto nell'espressione che definisce la funzione ottenendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} & \text{se } x > -1 \\ \\ e^{-\frac{x}{x+1}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

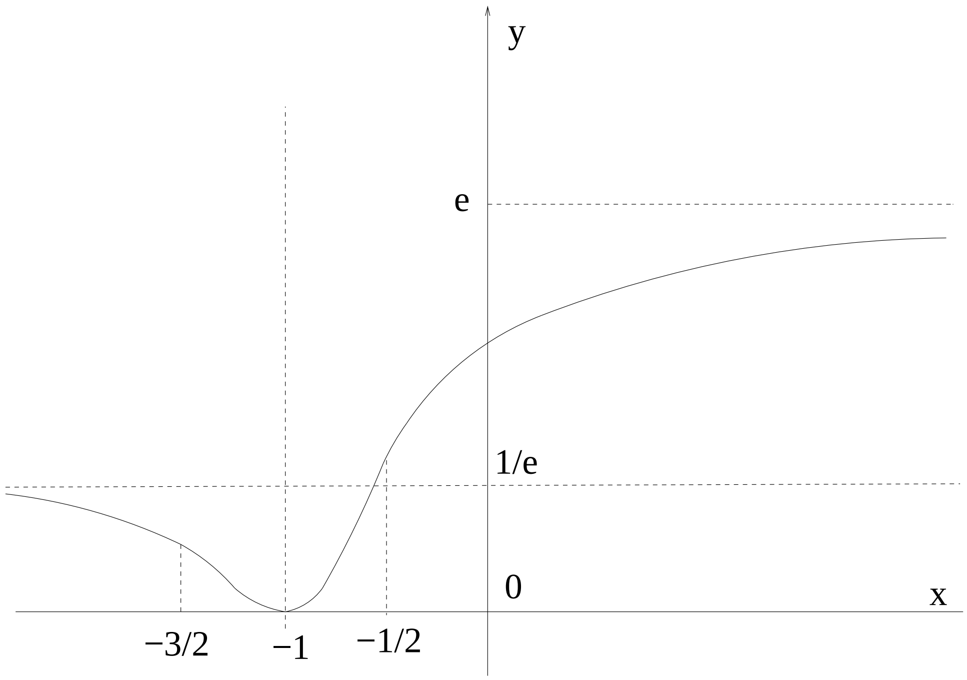
Da cui

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x > -1 \\ \\ -\, e^{-\frac{x}{x+1}} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -1$, $f'(x) < 0$ per ogni $x < -1$. Quindi f é crescente su $(-1, +\infty)$, decrescente su $(-\infty, -1)$.
Calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+1}} \dfrac{-2x-1}{(x+1)^4} & \text{se } x > -1 \\ \\ e^{-\frac{x}{x+1}} \dfrac{2x+3}{(x+1)^4} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Consideriamo l'intervallo $(-1, +\infty)$. $f''(x) > 0$ se $x < -\frac{1}{2}$ e $f''(x) < 0$ se $x > -\frac{1}{2}$. Quindi f é convessa su $(-1, -\frac{1}{2})$ e concava su $(-\frac{1}{2}, +\infty)$
Mentre sull'intervallo $(+\infty, -1)$, $f''(x) > 0$ se $x > -\frac{3}{2}$ e $f''(x) < 0$ se $x < -\frac{3}{2}$. Allora f é convessa su $(-\frac{3}{2}, -1)$ e concava su $(-\infty, -\frac{3}{2})$.
I punti $x_1 = -\frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso dove il coefficiente angolare della retta tangente assume i seguenti valori: $f'(x_1) = -4e^3$, $f'(x_2) = 4e^{-1}$.
Siamo ora in grado di tracciare il seguente grafico.



Esercizio 3.

Effettuiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, quindi $x = t^2$ e $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$. Sostituiamo

$$\int \frac{2}{(t^2+2)t^2}\; dt.$$

Il polinomio al denominatore ha radici complesse coniugate $t_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$ con molteplicitá uno; radice reale $t_3 = 0$ con molteplicitá 2. Applichiamo la formula di Hermite e determiniamo i parametri reali A, B, C, D tali che

$$\frac{2}{(t^2+2)t^2} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2} + \frac{d}{dt}\frac{D}{t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2} - \frac{D}{t^2} = \frac{At + (Bt+C)t^2 - D(t^2+2)}{t^2(t^2+2)}.$$

Deve essere per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$2 \;=\; At(t^2+2) + (Bt+C)t^2 - D(t^2+2).$$

Assegnando il valore $t = 0$ otteniamo $D = -1$, che sostituito nell'identitá sopra fornisce

$$(A+B)t^3 + (C+1)t^2 + 2At = 0,$$

da cui per il principio di identitá dei polinomi: $A = 0$, $B = 0$, $C = -1$.
Tenuto conto di questo, abbiamo

$$\frac{2}{(t^2+2)t^2} = -\frac{1}{t^2+2} + \frac{1}{t^2}.$$

L'integrale da calcolare diventa

$$\int \frac{2}{(t^2+2)t^2}\ dt\ =\ \int -\frac{1}{t^2+2}\ +\ \frac{1}{t^2}\ dt\ =\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{\frac{t^2}{2}+1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\ dt\ +\ \int \frac{1}{t^2}\ dt\ =$$

$$=\ -\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\ -\ \frac{1}{t}\ +\ C.$$

In definitiva

$$\int \frac{1}{(x+2)\,x\,\sqrt{x}}\ dx\ =\ -\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \arctan\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\ -\ \frac{1}{\sqrt{x}}\ +\ C.$$

Esercizio 4.

Determiniamo le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

$$\lambda^2\ -\ 4\lambda\ +\ 13\ =\ 0.$$

Le radici sono $\lambda_{1,2}\ =\ 2\pm 3i$. Lo spazio vettoriale V_0 delle soluzioni é dato da

$$V_0=\left\{C_1\,e^{(2-3i)t}\ +\ C_2\,e^{(2+3i)t},\, C_1,\, C_2\in\mathbb{C}\right\}\ =$$

$$=\ \left\{C_1\,e^{2t}\ \sin 3t+\ C_2\,e^{2t}\ \cos 3t,\, C_1,\, C_2\in\mathbb{C}\right\}.$$

Dato che il secondo membro dell'equazione é un polinomio di primo grado, cerchiamo una soluzione particolare u_f del tipo polinomio di terzo grado:

$$u_f(t)=At^3+Bt^2+Ct+D.$$

quindi

$$u_f'(t)=3At^2+2Bt+C,\quad u_f''(t)=6At+2B.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza e raccogliendo i termini simili

$$13At^3+(13B-12A)t^2+(6A-8B+13C)t+2B-4C+13D=5t.$$

Applicando il principio di identitá dei polinomi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A=0 \\ 13B=0 \\ 13C=5 \\ -4C+13D=0 \end{cases}$$

Da cui

$$A=0,\ B=0,\ C=\frac{5}{13},\ D=\frac{20}{169}.$$

Quindi

$$u_f(t)\ =\ \frac{5}{13}\,t\ +\ \frac{20}{169}.$$

L'insieme V_f delle soluzioni dell'equazione non omogenea é

$$V_f \,=\, V_0 \,+\, u_f(t) \,=\, \left\{ C_1\, e^{2t}\, \sin 3t + \, C_2\, e^{2t}\, \cos 3t \,+\, \frac{5}{13}\, t \,+\, \frac{20}{169},\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Deriviamo l'espressione ed imponiamo le condizioni iniziali

$$u'(t) = 2C_1\, e^{2t}\, \sin 3t + C_1 e^{2t} 3 \cos 3t + \, 2C_2\, e^{2t}\, \cos 3t \,-\, 3C_2 e^{2t} \sin 3t \,+\, \frac{5}{13}.$$

Quindi

$$u(0) \,=\, C_2 \,+\, \frac{20}{169} \,=0,\;\; u'(0) \,=\, C_1 3 \,+\, 2C_2 \,+\, \frac{5}{13} \,=\, 0.$$

Da cui

$$C_1 \,=\, -\frac{25}{507},\;\; C_2 \,=\, -\,\frac{20}{169}.$$

La soluzione del problema assegnato é

$$u(t) \,=\, -\frac{25}{507}\, e^{2t}\, \sin 3t \,-\, \frac{20}{169}\, e^{2t}\, \cos 3t \,+\, \frac{5}{13}\, t \,+\, \frac{20}{169}.$$