Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 3 luglio 2018

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 5) Dimostrare per induzione la seguente diseguaglianza

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. (Punti 8 Determinare il comportamento della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\log(1 + n^\alpha) - \alpha \log n\right].$$

3. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{e^x - 1},$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

4. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x) \cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx.$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 5) calcolarne il valore.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 5) Dimostrare per induzione la seguente diseguaglianza

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Svolgimento

Se $n = 0$: $1 \leq \frac{4}{3}$. Verifichiamo l'induttivitá della proposizione, ovvero proviamo l'implicazione

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq \frac{3^n}{2^{2n}}.$$

Consideriamo il primo membro dell'ultima diseguaglianza a maggioriamo come segue utilizzando l'ipotesi induttiva.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\leq \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} \; \frac{2}{3} \; = \; \frac{3^n}{2^{2n}} \; \frac{2^3}{3^2} < \frac{3^n}{2^{2n}}.$$

2. (Punti 8 Determinare il comportamento della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\log(1 + n^\alpha) \; - \; \alpha \, \log n\right].$$

Svolgimento.

Se $\alpha = 0$ la serie é indeterminata perché assume la forma

$$\log 2 \; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.$$

Se $\alpha < 0$ allora $\alpha = -|\alpha|$ possiamo quindi scriverla nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\log\left(1 + \frac{1}{n^{|\alpha|}}\right) \; - \; \log \frac{1}{n^{|\alpha|}}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \log\left(n^{|\alpha|} + 1\right).$$

Questa serie é indeterminata perché il suo termine generale é a segni alterni e non infinitesimo. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \log(n^{|\alpha|} + 1) = +\infty.$$

Consideriamo ora il caso $\alpha > 0$. Possiamo scrivere la serie nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \log\left(\frac{1 + n^\alpha}{n^\alpha}\right).$$

Vediamo se sono verificate le condizione del Teorema di Leibnitz. Osserviamo che

$$\log\left(\frac{1+n^\alpha}{n^\alpha}\right) > 0, \text{ per ogni } n \geq 1, \text{ perché } \frac{1+n^\alpha}{n^\alpha} > 1.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1+n^\alpha}{n^\alpha}\right) = 0$$

Resta da verificare che é decrescente. Per fare questo consideriamo la funzione associata e studiamo il segno della sua derivata prima.

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x^\alpha}{x^\alpha}\right), \quad x > 0.$$

$$f'(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0.$$

Da cui deduciamo che la funzione é decrescente e quindi la successione $\log\left(\frac{1+n^\alpha}{n^\alpha}\right)$ é decrescente. Sono verificate le ipotesi del Teorema di Leibnitz, quindi la serie data converge per $\alpha > 0$ e, come abbiamo visto sopra, anche per $\alpha = 0$.

3. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{e^x - 1},$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento

Il campo di esistenza di f é determinato dai valori di x che rendono l'argomento della radice non negativo: $e^x - 1 \geq 0$, quindi $x \geq 0$. La funzione risulta sempre positiva tranne nel punto $x = 0$ dove vale zero. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^x}}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

$$f'(x) = \frac{2-e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ se $2 - e^x > 0$ ovvero $x < \log 2$, mentre $f'(x) < 0$ per $x > \log 2$, $f'(\log 2) = 0$. Di conseguenza la funzione é crescente su $[0, \log 2)$ ed é decrescente su $(\log 2, +\infty)$. Il punto $x_1 = \log 2$ d́i massimo.
Infine

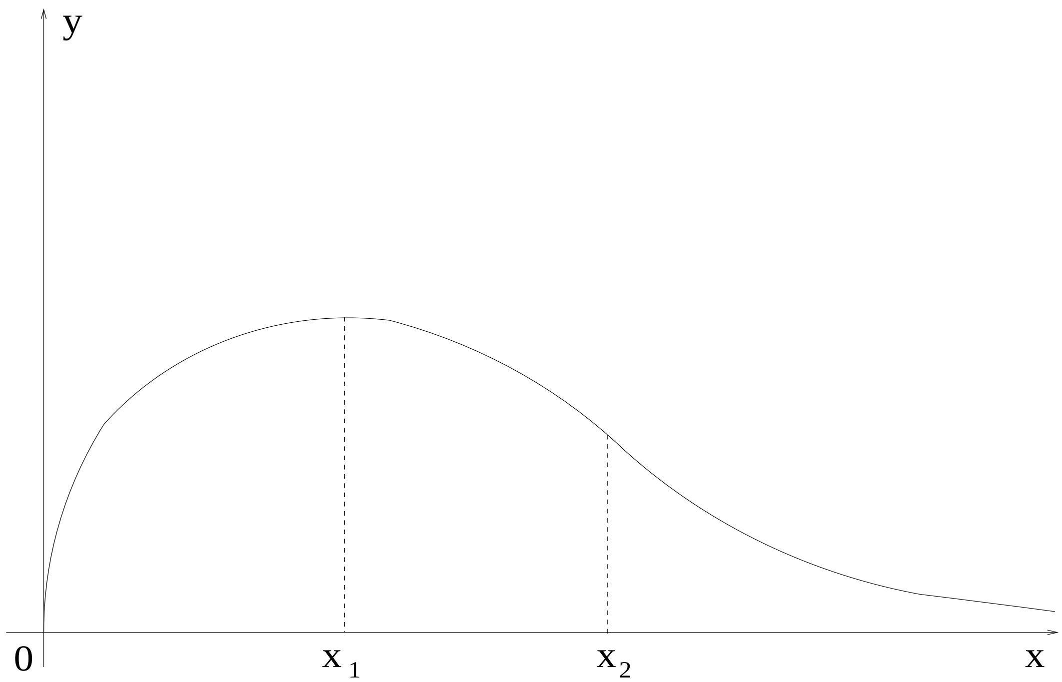
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

Nel punto $x = 0$ il grafico di f ha tangente verticale.

$$f''(x) = \frac{-6 + 4e^{-x} + e^x}{4(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}}.$$

Il segno di f'' é determinato dal numeratore della frazione perché il denominatore é sempre positivo. Risolviamo quindi $-6 + 4e^{-x} + e^x > 0$ che equivale a $e^{2x} - 6e^x + 4 > 0$. Posto $t = e^x$ otteniamo $t^2 - 6t + 4 > 0$. Questa é verificata per $t < 3 - \sqrt{5}$ oppure per $t > 3 + \sqrt{5}$. Quindi deve essere $x < \log(3 - \sqrt{5})$ oppure $x > \log(3 + \sqrt{5})$. Dato che $3 - \sqrt{5} < 1$, risulta $\log(3 - \sqrt{5}) < 0$. Possiamo quindi affermare che $f''(x) > 0$ per $x > \log(3 + \sqrt{5})$. Di conseguenza la funzione risulta convessa sull'intervallo $(\log(3 + \sqrt{5}), +\infty)$, mentre é concava su $[0, \log(3 + \sqrt{5}))$. Il punto $x_2 = \log(3 + \sqrt{5})$ é di flesso.

Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



4. (Punti 8) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x) \cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx.$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 5) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) La funzione risulta continua sull'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$, e non é limitata nell'intorno di zero. Inoltre essa é non negativa, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico mettendola a confronto con la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, che é integrabile sul dominio considerato perché l'esponente é minore di uno.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(1+\sin x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1 + \sin x)\cos x\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = 1.$$

La funzione é integrabile in senso improprio su $(0, \frac{\pi}{2}]$.

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}\ dx.$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 5) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) La funzione risulta continua sull'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$, e non é limitata nell'intorno di zero. Inoltre essa é non negativa, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico mettendola a confronto con la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, che é integrabile sul dominio considerato perché l'esponente é minore di uno.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(1+\sin x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1 + \sin x)\cos x\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = 1.$$

La funzione é integrabile in senso improprio su $(0, \frac{\pi}{2}]$.

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}\ dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)\cos x}{\sqrt{\sin x}}\ dx.$$

Calcoliamo l'integrale mediante il seguente cambio di variabile: $t = \sin x$. Di conseguenza $dt = \cos x\ dx$, mentre per $x = c$ abbiamo $t = \sin c$ e per $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo $t = 1$. L'integrale da calcolare diventa

$$\lim_{c\to 0+} \int_{\sin c}^1 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\ dt = \lim_{c\to 0+} \int_{\sin c}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt + \int_{\sin c}^1 \sqrt{t}\ dt = \lim_{c\to 0+} \left[2\sqrt{t}\right]_{\sin c}^1 + \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{\sin c}^1 = \frac{8}{3}.$$