

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1-B

Programma svolto nelle lezioni del primo semestre dell'Anno Accademico 2016-2017

Vocabolario di logica e teoria degli insiemi

Proposizioni, connettivi logici e loro proprietà (associativa, commutativa, De Morgan). L'implicazione e l'equivalenza tra proposizioni. Le dimostrazioni per assurdo. Significato ed uso dei quantificatori. Negazione di una proposizione in cui compaiono i quantificatori. Le operazioni tra insiemi: intersezione, unione, passaggio al complementare. Le proprietà delle operazioni tra insiemi.

I numeri reali.

Gli assiomi algebrici e di ordinamento sui numeri reali. Definizione di insieme limitato (inferiormente e superiormente). Definizione di maggiorante e di minorante. Definizione di massimo e di minimo. Teorema sull'unicità del massimo o del minimo (dim). Definizione di estremo superiore o inferiore di un sottoinsieme dei numeri reali. Caratterizzazione dell'estremo superiore e inferiore. L'assioma di continuità sui numeri reali. \mathbb{Q} non verifica l'assioma di continuità (dim). Il principio di Archimede (dim.). Sottoinsiemi induttivi di \mathbb{R} . Dimostrazione del principio di induzione. La retta reale estesa. Sommatorie e prodotti finiti. Formula della somma di una progressione aritmetica e geometrica. Fattoriali e numero di permutazioni. Coefficienti binomiali e numero di combinazioni. Formula di Newton della potenza ennesima del binomio (dim.). Il triangolo di Pascal. La diseguaglianza di Bernoulli (dim.).

I numeri complessi.

Operazioni algebriche sui numeri complessi. Piano di Gauss, modulo, argomento e coniugato di un numero complesso. Radice ennesima di un numero complesso. Dimostrazione per induzione della formula di De Moivre. Teorema fondamentale dell'algebra. Risoluzione di equazioni nel campo complesso.

Le funzioni.

Funzioni tra insiemi. Funzioni iniettive, surgettive, invertibili. La funzione inversa. Composizione di funzioni. Funzioni pari, dispari, periodiche, monotone. Interpretazione grafica di iniettività e surgettività. Invertibilità delle funzioni e monotonia dell'inversa. Esempi di funzioni di variabile reale. La funzione valore assoluto, le funzioni lineari, le funzioni potenza. Funzione parte frazionaria. Funzione logaritmo. Proprietà dei logaritmi. Funzioni trigonometriche: seno, coseno, tangente, cotangente. Le funzioni trigonometriche inverse: arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Trasformazione di grafici: grafici di $f(kx)$, $kf(x)$, $f(x+a)$, esercizi sulla trasformazione di grafici e risoluzione grafica di equazioni e disequazioni. Seno e coseno iperbolico e loro inverse.

Le successioni.

Proprietà vere definitivamente e frequentemente. Definizione di successione. Definizione di limite finito ed infinito. Unicità del limite (dim.). Esempi di dimostrazione di limiti. Teorema algebrico sui limiti: limite della somma del prodotto e del quoziente nei casi finiti (dim.). Teorema della permanenza del segno (dim.). Teorema del confronto a due e a tre successioni (dim.) Teorema di Weierstrass sui limiti di successioni monotone (dim.). Le successioni limitate e $o(1)$ e il loro uso. Il numero di Nepero e . Criterio della radice (dim.), criterio del rapporto. Il criterio del rapporto implica il criterio della radice. I simboli di Landau O o (o -grande e o -piccolo) e il loro uso. Definizione per successione di funzione continua. Esempi dell'uso della continuità nel calcolo dei limiti.

Limiti di funzioni.

Definizione di intorni. Definizione di punto interno, esterno di frontiera e di accumulazione. Definizione di aperto e di chiuso. Definizione generale (con gli intorni) di limite di funzione. Unicità del limite (dim). Una funzione che ha limite finito è limitata (dim.). Teorema della permanenza del segno (dim.). Teorema della monotonia del limite (dim.). Teorema del confronto per i limiti di funzione (dim.). Teorema sul limite del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata (dim.). Dimostrazione della continuità delle funzioni notevoli. Dimostrazione del teorema che collega i limiti di funzioni a quelli di successioni. Dimostrazione dei teoremi sulle operazioni con i limiti. Esempi di funzioni che non ammettono limite. Definizione di limite

destro e sinistro. Casi di indeterminazione nelle operazioni con i limiti. Dimostrazione del teorema sui limiti di funzioni composte. Limiti notevoli. Algebra degli o-piccoli. Dimostrazione del principio di sostituzione degli infinitesimi.

Funzioni continue.

Definizione di continuità mediante il limite. Teorema degli zeri (dim.). Metodo di bisezione e suo uso per il calcolo delle radici di un'equazione. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi di funzioni continue (dim.). Teorema di Bolzano-Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (dim.). Immagine di un intervallo mediante una funzione continua (dim.). Esistenza di limiti per funzioni monotone (dim.). Teorema sull'invertibilità delle funzioni continue (dim.).

Derivate.

Definizione di derivata e suo significato geometrico e fisico. Rapporti incrementali, retta tangente e velocità istantanea. Derivata destra e sinistra. Esempi di punti di non differenziabilità (punti angolosi e punti con tangente verticale). Derivate di funzioni elementari. Dimostrazione dei teoremi algebrici sul calcolo delle derivate (somma, prodotto, rapporto). Dimostrazione della formula di derivazione delle funzioni composte (regola della catena). Derivata della funzione inversa (dim.). Punti estremali e derivate nei punti estremali (dim.). Teorema di Fermat (dim.). Teorema di Lagrange (dim.). Teorema sulla derivata delle funzioni monotone (dim.). Dimostrazione del teorema dell'Hospital nel caso $0/0$. Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange. Polinomi di Taylor-Mac Laurin per alcune funzioni elementari. Approssimazione dei valori di una funzione mediante il polinomio di Taylor con stima dell'errore. Calcolo approssimato di π e di e . Convessità e derivate seconde. Segno delle derivate seconde nei punti di massimo e di minimo relativo (dim.). Il metodo delle corde e delle tangenti di Newton (dim.) e sue applicazioni. Calcolo dei limiti con la formula di Taylor.

Serie numeriche.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie (dim.). Studio di alcune serie notevoli: serie geometrica, telescopica, armonica. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: confronto (dim.), rapporto (dim.), radice ennesima (dim.). Confronto asintotico (dim.). Definizione di serie assolutamente convergente. Criterio della convergenza assoluta (dim.). Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno (dim.). Serie di Taylor elementari (dimostrazione). Convergenza delle successioni e delle serie nel campo complesso. Criterio della convergenza assoluta di una serie nel campo complesso (dim.). Definizione di alcune funzioni con variabile complessa: esponenziale, seno, coseno.

Calcolo integrale.

Definizione di primitiva. Due primitive differiscono per una costante (dim.). Esempi di funzioni che non ammettono primitiva. Proprietà dell'integrale indefinito. Dimostrazione della formula di integrazione per parti. Cambiamento di variabile nell'integrale indefinito. Calcolo degli integrali di alcune classi di funzioni: funzioni del tipo prodotto di polinomio per esponenziale e \sin e/o \cos , prodotto di polinomi per altre funzioni irrazionali come *logaritmo*, \arctan , \arcsin , ecc. Integrali di funzioni razionali (la formula di Hermite). Integrali di funzioni razionali di \sin e/o \cos . Integrali di funzioni razionali di polinomi di primo grado con esponente razionale. Integrali di funzioni razionali di radici quadrate di polinomi di secondo grado.

Definizione di integrale di Riemann. Esempi di funzioni integrabili o non integrabili secondo Riemann. Criterio di integrabilità. Proprietà dell'integrale di R.: linearità, monotonia, assoluta continuità, integrabilità del prodotto e additività rispetto al dominio. Teorema della media integrale (dim.). Teorema del valor medio per funzioni continue (dim.). Dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone. (Richiamo della definizione di funzione uniformemente continua e dell'enunciato del teorema di Heine-Cantor). Integrabilità delle funzioni con un numero finito di discontinuità di salto. Il teorema fondamentale del calcolo integrale (dim.). Teorema di esistenza delle primitive di funzioni continue (dim.). Il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni continue (dim.).

Integrali impropri o generalizzati. Definizione di integrale improprio su domini non limitati e di integrali impropri di funzioni non limitate nell'intorno di un punto. Esempi di calcolo di integrali impropri: le funzioni armoniche. Proprietà degli integrali impropri. Criteri di integrabilità: criterio del confronto (dim.), criterio della convergenza asintotica (dim.). Definizione di funzione assolutamente integrabile. Criterio dell'assoluta integrabilità. Criterio della convergenza asintotica (dim.). Teorema sul confronto tra integrale improprio e serie numerica (dim.).