Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 14 gennaio 2017
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = i.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right)$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{-\frac{2}{n}} - \cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = i.$$

Svolgimento.
(I metodo.)
Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ il primo membro dell'equazione può essere espresso nella forma seguente

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

di conseguenza l'equazione diventa

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = i, \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} \cos x + i\, e^{-y} \sin x = i$$

Eguagliando rispettivamente la parte reale e qualla immaginaria del primo membro con quelle del secondo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = 0 \\ \\ e^{-y} \sin x = 1 \end{cases}$$

La prima equazione ammette come soluzioni

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le x_k che verificano anche la seconda sono solo quelle con indice per cui $\sin x_k = 1$, mentre deve essere $y = 0$. In definitiva l'equazione ammette come soluzioni

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right)$$

a) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

Il campo di esistenza è determinato dai valori della variabile x che rendono positivo l'argomento del *logaritmo*:

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1} > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} > e^{x+1} \iff \frac{x}{2} > x+1 \iff x < -2.$$

Segno della funzione:
dato che per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta: $e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1} < 1$, perchè $e^{\frac{x}{2}} < e^x < e^{x+1} + 1$, allora $f(x) < 0$ per ogni $x < -2$.
Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio.

$$\lim_{x \to -2^-} \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right) = -\infty,$$

perchè per x che tende a -2^- l'argomento del *logaritmo* tende a 0^+. Infatti

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1} = e^{x+1}\left(e^{\frac{x}{2}-x-1} - 1\right) > 0$$

perchè $\frac{x}{2} - x - 1 > 0$ per $x > -2$.
Mentre

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right) = -\infty,$$

perchè possiamo scrivere l'argomento del *logaritmo* come prodotto

$$\log\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{-\frac{x}{2}+x+1}\right)\right] = \log\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1 - e^{\frac{x}{2}+1}\right)\right],$$

dove per x che tende a meno infinito $\left(1 - e^{\frac{x}{2}+1}\right)$ tende a 1, mentre $e^{\frac{x}{2}}$ tende a 0^+.
Vediamo se esiste un asintoto obliqui, $y = mx + q$ per x che tende a $-\infty$, calcolando i limiti che seguono.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right)}{x} =$$

(per il teorema dell'Hospital)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} \; \frac{\frac{1}{2} - e^{\frac{x}{2}+1}}{1 - e^{\frac{x}{2}+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right) - \frac{1}{2}x =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right) - \log e^{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \to -\infty} \log \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right)}{e^{\frac{1}{2}x}} = \lim_{x \to -\infty} \log\left(1 - e^{\frac{x}{2}+1}\right) = 0.$$

Ne segue che l'asinto obliquo per x che tende a meno infinito è la retta di equazione

$$y = \frac{1}{2}x$$

Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}}.$$

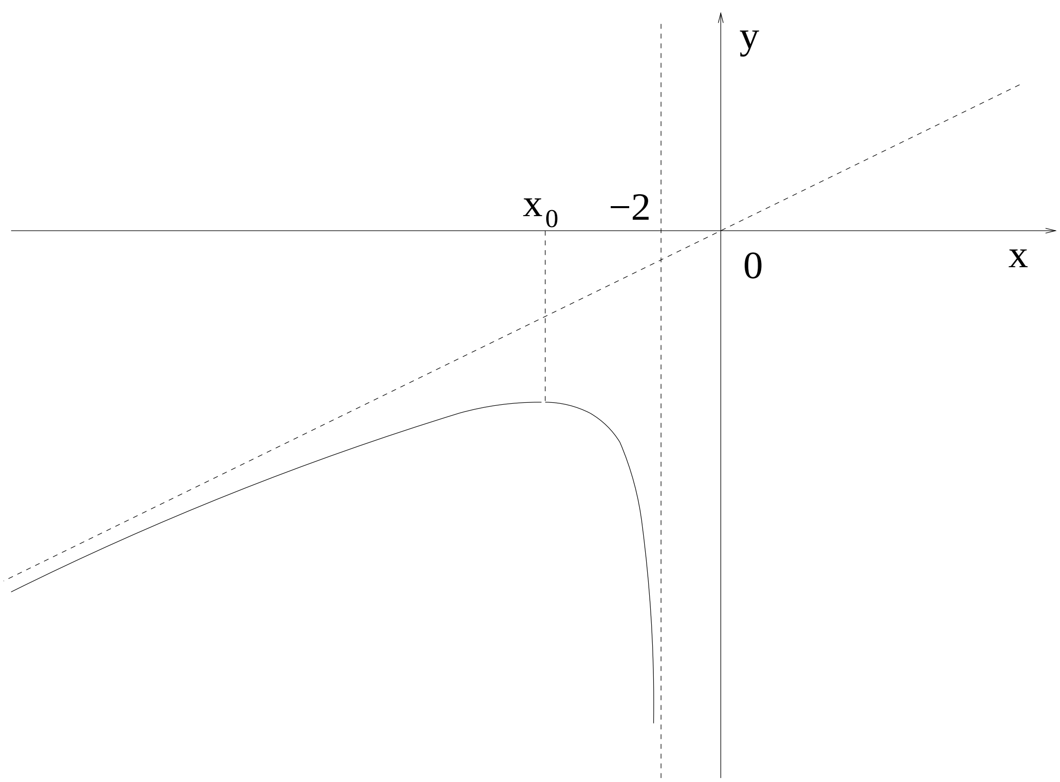
Imponiamo $f'(x) > 0$. Tenuto conto che il denominatore è sempre positivo otteniamo

$$\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} > e^{x} \cdot e \iff e^{-\frac{x}{2}} > 2e \iff -\frac{x}{2} > \log(2e) \iff x < -\log 4 - 2$$

Da questo deduciamo che la f' risulta positiva sulla semiretta $(-\infty, -\log 4 - 2)$ e negativa in $(-\log 4 - 2)$. La funzione è quindi crescente su $(-\infty, -\log 4 - 2)$ e decrescente su $(-\log 4 - 2, -2)$. Il punto $x_0 = -\log 4 - 2$ è di massimo assoluto.
Determiniamo gli intervalli di concavità e/o convessità della funzione mediante la sua derivata seconda.

$$f"(x) = -\frac{1}{4}\, e^{\frac{3}{2}x+1}\, \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{x+1}\right)^2}$$

Ovviamente per ogni $x < -2$ risulta $f"(x) < 0$. Quindi la funzione è *concava* su tutto il suo campo di esistenza. Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}\; dx$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che la funzione integranda risulta positiva e continua su $[1, +\infty)$, inoltre per x che tende a $+\infty$ tende a zero. Infatti il logaritmo posto al numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva di x. Valutiamo l'ordine di infinitesimo mediante il teorema del confronto asintotico. Dato che al denominatore della funzione data compare x^2, basterà effettuare il confronto con una funzione armonica che abbia esponente minore di due, ed ovviamente maggiore di uno, ad esempio $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, che è integrabile.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Da questo deduciamo che l'infinitesimo al denominatore è "più forte" di quello al numeratore e quindi lo maggiora definitivamente a meno di una costante, ovvero esistono $C > 0$ e $x_0 > 1$ tali che per ogni $x > x_0$

$$0 < \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2} < C\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il teorema del confronto, l'integrale esiste finito.

(b) Calcolo dell'integrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}\ dx\ =\ \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}\ dx\,.$$

Effettuiamo nell'integrale il cambio di variabile

$$t^2 = 7x+9 \iff x = \frac{t^2-9}{7}; \quad dx = \frac{2}{7}t\,dt,$$

per $x = 1$, $t = 4$, per $x = c$, $t = \sqrt{7c+9}$. Tenuto conto di questo otteniamo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}\ dx\ =\ \lim_{c\to+\infty} 7\int_4^{\sqrt{7c+9}} \log(1+t)\, \frac{2t}{(t^2-9)^2}\ dt.$$

Risolviamo integrando per parti([1])

$$f'(x) = \frac{2t}{(t^2-9)^2} \implies f(x) = -\frac{1}{t^2-9}; \quad g(x) = \log(1+t) \implies g'(x) = \frac{1}{1+t}.$$

---

[1]
$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx\ =\ [f(x)\,g(x)]_a^b\ -\ \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx.$$

Quindi

$$7\lim_{c\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1}{t^2-9}\,\log(1+t)\right]_4^{\sqrt{7c+9}}\;+\;\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{(1+t)(t^2-9)}\;dt\right\}=$$

$$=7\lim_{c\to+\infty}\left\{-\frac{1}{7c}\,\log(1+\sqrt{7c+9})\;+\;\frac{\log 5}{7}\;+\;\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{(1+t)(t^2-9)}\;dt\right\}=$$

$$=\log 5\;+\;7\lim_{c\to+\infty}\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{(1+t)(t^2-9)}\;dt\;=$$

La funzione integranda è di tipo razionale. Utilizziamo il metodo di Hermite determinando le costanti reali A, B, C tali che

$$\frac{1}{(1+t)(t^2-9)}\;=\;\frac{A}{t-3}\;+\;\frac{B}{t+3}\;+\;\frac{C}{1+t}\;=\;\frac{A(t+3)(1+t)+B(t-3)(1+t)+C(t^2-9)}{(1+t)(t^2-9)}$$

Da cui

$$1=A(t+3)(1+t)+B(t-3)(1+t)+C(t^2-9)$$

Questa identità deve valere per ogni $t\in\mathbb{R}$. Al fine di calcolare le costanti A, B, C possiamo assegnare quindi opportuni valori alla variabile t, in particolare assegneremo quelli che annullando alcuni dei binomi facilitano il calcolo.
Per $t=3$ otteniamo $A=\frac{1}{24}$, se $t=-3$ otteniamo $B=\frac{1}{12}$, mentre per $t=-1$, $C=-\frac{1}{8}$. Per questo possiamo scrivere

$$\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{(1+t)(t^2-9)}\;dt\;=$$

$$=\frac{1}{24}\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{t-3}\,dt\;+\;\frac{1}{12}\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{t+3}\,dt\;-\;\frac{1}{8}\int_4^{\sqrt{7c+9}}\frac{1}{1+t}\,dt\;=$$

$$=\;\frac{1}{24}\;[\log|t-3|]_4^{\sqrt{7c+9}}\;+\;\frac{1}{12}\;[\log|t+3|]_4^{\sqrt{7c+9}}\;-\;\frac{1}{8}\;[\log|1+t|]_4^{\sqrt{7c+9}}\;=$$

$$=\frac{1}{24}\,\log(\sqrt{7c+9}-3)\;+\;\frac{1}{12}\,\log(\sqrt{7c+9}+3)\;-\;\frac{1}{12}\,\log 7\;-\;\frac{1}{8}\,\log(1+\sqrt{7c+9})\;+\;\frac{1}{8}\,\log 5\;=$$

$$=\log\frac{(\sqrt{7c+9}-3)^{\frac{1}{24}}\,(\sqrt{7c+9}+3)^{\frac{1}{12}}}{(1+\sqrt{7c+9})^{\frac{1}{8}}}\;-\;\frac{1}{12}\,\log 7\;+\;\frac{1}{8}\log 5.$$

Tenuto conto che

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{(\sqrt{7c+9}-3)^{\frac{1}{24}}\,(\sqrt{7c+9}+3)^{\frac{1}{12}}}{(1+\sqrt{7c+9})^{\frac{1}{8}}}=\lim_{c\to+\infty}\frac{c^{\frac{1}{48}+\frac{1}{24}}(\sqrt{7+\frac{9}{c}}-\frac{3}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{24}}\,(\sqrt{7+\frac{9}{c}}+\frac{3}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{12}}}{(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{7+\frac{9}{c}})^{\frac{1}{8}}c^{\frac{1}{16}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{7})^{\frac{1}{24}}\,(\sqrt{7})^{\frac{1}{12}}}{(\sqrt{7})^{\frac{1}{8}}}\;=\;1,$$

perchè $\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$, otteniamo infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{7x+9})}{x^2}\ dx \ = \ \frac{15}{8}\log 5 \ - \ \frac{7}{12}\log 7.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{-\frac{2}{n}} \ - \ \cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2$$

Svolgimento.

Il termine racchiuso tra le parentesi è infinitesimo in quanto risulta

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{2}{\sqrt{n}} \ = \ 1.$$

Stabiliamo il suo ordine di infinitesimo considerando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che vi compaiono.

$$e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2).$$

Quindi per $t=\frac{1}{n}$

$$e^{-\frac{2}{n}} \ = 1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Mentre da

$$\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^2)$$

ricaviamo con $t=\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$\cos\frac{2}{\sqrt{n}} = 1-\frac{2}{n}+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Tenuto conto di queste eguaglianze otteniamo

$$\left(e^{-\frac{2}{n}} \ - \ \cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \ = \ \left(\frac{4}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 = \frac{16}{9}\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Il termine generale della serie si può quindi scrivere nella forma

$$a_n = n\left[\frac{16}{9}\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] = \frac{16}{9}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Applichiamo il teorema del confronto asintotico confrontando a_n con la serie armonica $\frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{16}{9}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{16}{9}.$$

Possiamo concludere che la serie data è convergente, dato che si comporta come la serie armonica con esponente 3.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 14 gennaio 2017
Fila 2.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = -i.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{x+2}\right)$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left[\sin^2 \frac{2}{n} - \log\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)\right]$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = -i.$$

Svolgimento.
(I metodo.)
Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ il primo membro dell'equazione può essere espresso nella forma seguente

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

di conseguenza l'equazione diventa

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = -i, \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-y} \cos x + i\, e^{-y} \sin x = -i$$

Eguagliando rispettivamente la parte reale e qualla immaginaria del primo membro con quelle del secondo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = 0 \\ \\ e^{-y} \sin x = -1 \end{cases}$$

La prima equazione ammette come soluzioni

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le x_k che verificano anche la seconda sono solo quelle per cui $\sin x_k = -1$, mentre deve essere $y = 0$. In definitiva l'equazione ammette come soluzioni

$$z_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Punti 9
C.E.: $(-\infty, -3)$.
Asintoto $y = \dfrac{1}{3}\,x$.
f cresce su $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\,[2 + \log 3]\right)$, decresce $\left(-\dfrac{3}{2}\,[2 + \log 3]\,, -3\right)$.
$x_0 = -\dfrac{3}{2}\,[2 + \log 3]$ è punto di massimo assoluto.
f è convessa.
Il grafico è simile a quello della Fila 1.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x + 16})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che la funzione integranda risulta positiva e continua su $[1, +\infty)$, inoltre per x che tende a $+\infty$ tende a zero. Infatti il logaritmo posto al numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva di x. Valutiamo l'ordine di infinitesimo mediante il teorema del confronto asintotico. Dato che al denominatore della funzione data compare x^2, basterà effettuare il confronto con una funzione armonica che abbia esponente minore di due, ed ovviamente maggiore di uno, ad esempio $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, che è integrabile.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Da questo deduciamo che l'infinitesimo al denominatore è "più forte" di quello al numeratore e quindi lo maggiora definitivamente a meno di una costante, ovvero esistono $C > 0$ e $x_0 > 1$ tali che per ogni $x > x_0$

$$0 < \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2} < C\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il teorema del confronto, l'integrale esiste finito.

(b) Calcolo dell'integrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2}\ dx \ = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2}\ dx\,.$$

Effettuiamo nell'integrale il cambio di variabile

$$t^2 = x + 16 \iff x = t^2 - 16; \quad dx = 2t\,dt,$$

per $x = 1$, $t = \sqrt{17}$, per $x = c$, $t = \sqrt{c+16}$. Tenuto conto di questo otteniamo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2}\ dx \ = \lim_{c\to+\infty} \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}} \log(1+t)\,\frac{2t}{(t^2-16)^2}\ dt.$$

Risolviamo integrando per parti([2])

$$f'(x) = \frac{2t}{(t^2-16)^2} \implies f(x) = -\frac{1}{t^2-16}; \quad g(x) = \log(1+t) \implies g'(x) = \frac{1}{1+t}.$$

[2]
$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx \ = \ [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx.$$

Quindi

$$\lim_{c\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1}{t^2-16}\ \log(1+t)\right]_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\ +\ \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{(1+t)(t^2-16)}\ dt\right\}=$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left\{-\frac{1}{c}\ \log(1+\sqrt{c+16})\ +\ \log(1+\sqrt{17})\ +\ \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{(1+t)(t^2-16)}\ dt\right\}=$$

$$=\log(1+\sqrt{17})\ +\ \lim_{c\to+\infty}\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{(1+t)(t^2-16)}\ dt\ =$$

La funzione integranda è di tipo razionale. Utilizziamo il metodo di Hermite determinando le costanti reali A, B, C tali che

$$\frac{1}{(1+t)(t^2-16)}\ =\ \frac{A}{t-4}+\frac{B}{t+4}+\frac{C}{1+t}\ =\ \frac{A(t+4)(1+t)+B(t-4)(1+t)+C(t^2-16)}{(1+t)(t^2-16)}$$

Da cui

$$1=A(t+4)(1+t)+B(t-4)(1+t)+C(t^2-16)$$

Questa identità deve valere per ogni $t\in\mathbb{R}$. Al fine di calcolare le costanti A, B, C possiamo assegnare quindi opportuni valori alla variabile t, in particolare assegneremo quelli che annullando alcuni dei binomi facilitano il calcolo.
Per $t=4$ otteniamo $A=\frac{1}{40}$, se $t=-4$ otteniamo $B=\frac{1}{24}$, mentre per $t=-1$, $C=-\frac{1}{15}$. Per questo possiamo scrivere

$$\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{(1+t)(t^2-16)}\ dt\ =$$

$$=\frac{1}{40}\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{t-4}\,dt\ +\ \frac{1}{24}\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{t+4}\,dt\ -\ \frac{1}{15}\int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\frac{1}{1+t}\,dt\ =$$

$$=\frac{1}{40}\ [\log|t-4|]_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\ +\ \frac{1}{24}\ [\log|t+4|]_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\ -\ \frac{1}{15}\ [\log|1+t|]_{\sqrt{17}}^{\sqrt{c+16}}\ =$$

$$=\frac{1}{40}\ \log(\sqrt{c+16}-4)\ +\ \frac{1}{24}\ \log(\sqrt{c+16}+4)\ -\ \frac{1}{15}\log(1+\sqrt{c+16})\ +$$

$$-\frac{1}{40}\ \log(\sqrt{17}-4)\ -\ \frac{1}{24}\ \log(\sqrt{17}+4)\ +\ \frac{1}{15}\ \log(1+\sqrt{17})\ =$$

$$=\log\frac{(\sqrt{c+16}-4)^{\frac{1}{40}}\,(\sqrt{c+16}+4)^{\frac{1}{24}}}{(1+\sqrt{c+16})^{\frac{1}{15}}}\ -\ \frac{1}{40}\ \log(\sqrt{17}-4)\ -\ \frac{1}{24}\ \log(\sqrt{17}+4)\ +\ \frac{1}{15}\ \log(1+\sqrt{17}).$$

Tenuto conto che

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{(\sqrt{c+16}-4)^{\frac{1}{40}}\,(\sqrt{c+16}+4)^{\frac{1}{24}}}{(1+\sqrt{c+16})^{\frac{1}{15}}}=\lim_{c\to+\infty}\frac{c^{\frac{1}{80}+\frac{1}{48}}(\sqrt{1+\frac{16}{c}}-\frac{4}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{40}}\,(\sqrt{1+\frac{16}{c}}+\frac{4}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{24}}}{(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{1+\frac{16}{c}})^{\frac{1}{15}}c^{\frac{1}{30}}}\ =\ 1,$$

perchè $\frac{1}{80} + \frac{1}{48} = \frac{1}{30}$, otteniamo infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+16})}{x^2}\ dx \ = \ -\frac{1}{40}\ \log(\sqrt{17}-4)\ -\ \frac{1}{24}\ \log(\sqrt{17}+4)\ +\ \frac{16}{15}\ \log(1+\sqrt{17})\,.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left[\sin^2 \frac{2}{n} \ - \ \log\left(1 \ + \ \frac{4}{n^2}\right)\right]$$

Svolgimento.
Il termine racchiuso tra le parentesi è infinitesimo in quanto risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2 \frac{2}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{4}{n^2}\right) \ = \ 0.$$

Stabiliamo il suo ordine di infinitesimo considerando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che vi compaiono.

$$\sin t = t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3).$$

Quindi per $t = \frac{2}{n}$

$$\sin^2 \frac{2}{n} \ = \ \frac{4}{n^2} - \frac{4}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Mentre da

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

ricaviamo con $t = \frac{4}{n^2}$

$$\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Tenuto conto di queste eguaglianze otteniamo

$$\sin^2 \frac{2}{n^2} - \log\left(1+\frac{4}{n^2}\right) \ = \ \frac{20}{3}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Il termine generale della serie si può quindi scrivere nella forma

$$a_n = n^2\left[\frac{20}{3}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] = \frac{20}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dato che la serie risulta con termini definitivamente positivi, possiamo applicare il teorema del confronto asintotico confrontando a_n con la serie armonica $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{20}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{20}{3}.$$

Possiamo concludere che la serie data è convergente, dato che si comporta come la serie armonica con esponente 2.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 14 gennaio 2017
Fila 3.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = 1.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{x+1}\right)$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{15} \left(e^{-\frac{9}{2n^4}} - \cos\frac{3}{n^2}\right)^2$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = 1.$$

Svolgimento.
(I metodo.)
Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ il primo membro dell'equazione può essere espresso nella forma seguente

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

di conseguenza l'equazione diventa

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 1, \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} \cos x + i\, e^{-y} \sin x = 1$$

Eguagliando rispettivamente la parte reale e qualla immaginaria del primo membro con quelle del secondo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = 1 \\ \\ e^{-y} \sin x = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ammette come soluzioni

$$x_k = k\, 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le x_k che verificano anche la seconda sono solo quelle per cui $\sin x_k = 0$, mentre deve essere $y = 0$. In definitiva l'equazione ammette come soluzioni

$$z_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Punti 9
C.E.: $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.
Asintoto $y = \dfrac{1}{4}\, x$.
f cresce su $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\, [1 + \log 4]\right)$, decresce $\left(-\dfrac{4}{3}\, [1 + \log 4]\,, -\dfrac{4}{3}\right)$.
$x_0 = -\dfrac{4}{3}\, [1 + \log 4]$ è punto di massimo assoluto.
f è convessa.
Il grafico è simile a quello della Fila 1.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x+4})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che la funzione integranda risulta positiva e continua su $[1, +\infty)$, inoltre per x che tende a $+\infty$ tende a zero. Infatti il logaritmo posto al numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva di x. Valutiamo l'ordine di infinitesimo mediante il teorema del confronto asintotico. Dato che al denominatore della funzione data compare x^2, basterà effettuare il confronto con una funzione armonica che abbia esponente minore di due, ed ovviamente maggiore di uno, ad esempio $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, che è integrabile.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Da questo deduciamo che l'infinitesimo al denominatore è "più forte" di quello al numeratore e quindi lo maggiora definitivamente a meno di una costante, ovvero esistono $C > 0$ e $x_0 > 1$ tali che per ogni $x > x_0$

$$0 < \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2} < C\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il teorema del confronto, l'integrale esiste finito.

(b) Calcolo dell'integrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2}\; dx \;=\; \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2}\; dx\,.$$

Effettuiamo nell'integrale il cambio di variabile

$$t^2 = x+4 \iff x = t^2-4; \quad dx = 2t\,dt,$$

per $x = 1$, $t = \sqrt{5}$, per $x = c$, $t = \sqrt{c+4}$. Tenuto conto di questo otteniamo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2}\; dx \;=\; \lim_{c\to+\infty} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{c+4}} \log(1+t)\,\frac{2t}{(t^2-4)^2}\; dt.$$

Risolviamo integrando per parti([3])

$$f'(x) = \frac{2t}{(t^2-4)^2} \implies f(x) = -\frac{1}{t^2-4}; \quad g(x) = \log(1+t) \implies g'(x) = \frac{1}{1+t}.$$

[3]

$$\int_a^b f'(x)g(x)\; dx \;=\; [f(x)\,g(x)]_a^b \;-\; \int_a^b f(x)\,g'(x)\; dx.$$

Quindi

$$\lim_{c\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1}{t^2-4}\ \log(1+t)\right]_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\ +\ \int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{(1+t)(t^2-4)}\ dt\right\}=$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left\{-\frac{1}{c}\ \log(1+\sqrt{c+4})\ +\ \log(1+\sqrt5)\ +\ \int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{(1+t)(t^2-4)}\ dt\right\}=$$

$$=\log(1+\sqrt5)\ +\ \lim_{c\to+\infty}\int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{(1+t)(t^2-4)}\ dt\ =$$

La funzione integranda è di tipo razionale. Utilizziamo il metodo di Hermite determinando le costanti reali A, B, C tali che

$$\frac{1}{(1+t)(t^2-4)}\ =\ \frac{A}{t-2}\ +\ \frac{B}{t+2}\ +\ \frac{C}{1+t}\ =\ \frac{A(t+2)(1+t)+B(t-2)(1+t)+C(t^2-4)}{(1+t)(t^2-4)}$$

Da cui

$$1=A(t+2)(1+t)+B(t-2)(1+t)+C(t^2-4)$$

Questa identità deve valere per ogni $t\in\mathbb{R}$. Al fine di calcolare le costanti A, B, C possiamo assegnare quindi opportuni valori alla variabile t, in particolare assegneremo quelli che annullando alcuni dei binomi facilitano il calcolo.
Per $t=2$ otteniamo $A=\frac{1}{12}$, se $t=-2$ otteniamo $B=\frac14$, mentre per $t=-1$, $C=-\frac13$. Per questo possiamo scrivere

$$\int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{(1+t)(t^2-4)}\ dt\ =$$

$$=\frac{1}{12}\int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{t-2}\,dt\ +\ \frac14\int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{t+2}\,dt\ -\ \frac13\int_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\frac{1}{1+t}\,dt\ =$$

$$=\ \frac{1}{12}\ [\log|t-2|]_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\ +\ \frac14\ [\log|t+2|]_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\ -\ \frac13\ [\log|1+t|]_{\sqrt5}^{\sqrt{c+4}}\ =$$

$$=\frac{1}{12}\ \log(\sqrt{c+4}-2)\ +\ \frac14\ \log(\sqrt{c+4}+2)\ -\ \frac13\log(1+\sqrt{c+4})\ +$$

$$-\ \frac{1}{12}\ \log(\sqrt5-2)\ -\ \frac14\ \log(\sqrt5+2)\ +\ \frac13\ \log(1+\sqrt5)\ =$$

$$=\log\frac{(\sqrt{c+4}-2)^{\frac{1}{12}}\ (\sqrt{c+4}+2)^{\frac14}}{(1+\sqrt{c+4})^{\frac13}}\ -\ \frac{1}{12}\ \log(\sqrt5-2)\ -\ \frac14\ \log(\sqrt5+2)\ +\ \frac13\ \log(1+\sqrt5).$$

Tenuto conto che

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{(\sqrt{c+4}-2)^{\frac{1}{12}}\ (\sqrt{c+4}+2)^{\frac14}}{(1+\sqrt{c+4})^{\frac13}}\ =\ \lim_{c\to+\infty}\frac{c^{\frac{1}{24}+\frac18}(\sqrt{1+\frac4c}-\frac{2}{\sqrt c})^{\frac{1}{12}}\ (\sqrt{1+\frac4c}+\frac{2}{\sqrt c})^{\frac14}}{(\frac{1}{\sqrt c}+\sqrt{1+\frac4c})^{\frac13}c^{\frac16}}\ =\ 1,$$

perchè $\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$, otteniamo infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+4})}{x^2}\ dx \ = \ -\frac{1}{12}\log(\sqrt{5}-2) \ - \ \frac{1}{12}\log(\sqrt{5}+2) \ + \ \frac{4}{3}\log(1+\sqrt{5})\,.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{15}\left(e^{-\frac{9}{2n^4}} \ - \ \cos\frac{3}{n^2}\right)^2$$

Il termine racchiuso tra le parentesi è infinitesimo in quanto risulta

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{9}{2n^4}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\cos\frac{3}{n^2} \ = \ 1.$$

Stabiliamo il suo ordine di infinitesimo considerando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che vi compaiono.

$$e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2).$$

Quindi per $t=-\frac{9}{2n^4}$

$$e^{-\frac{9}{2n^4}} \ = \ 1-\frac{9}{2n^4}+\frac{81}{8n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

Mentre da

$$\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$$

ricaviamo con $t=\frac{3}{n^2}$

$$\cos\frac{3}{n^2} = 1-\frac{9}{2n^4}+\frac{27}{8n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right).$$

Tenuto conto di queste eguaglianze otteniamo

$$\left(e^{-\frac{9}{2n^4}} \ - \ \cos\frac{3}{n^2}\right)^2 \ = \ \left[\frac{27}{4}\frac{1}{n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right]^2 = \frac{629}{16}\frac{1}{n^{16}}+o\left(\frac{1}{n^{16}}\right).$$

Il termine generale della serie si può quindi scrivere nella forma

$$a_n = n^{15}\left[\frac{629}{16}\frac{1}{n^{16}}+o\left(\frac{1}{n^{16}}\right)\right] = \frac{629}{16}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dato che la serie risulta con termini definitivamente positivi, possiamo applicare il teorema del confronto asintotico confrontando a_n con la serie armonica $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{629}{16}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{629}{16}.$$

Possiamo concludere che la serie data è divergente, dato che si comporta come la serie armonica con esponente 1.

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 14 gennaio 2017
Fila 4.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = -1.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{5}} - e^{x+2}\right)$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^7 \left[\sin^2 \frac{3}{n^2} - \log\left(1 + \frac{9}{n^4}\right)\right]$$

1. (Punti 6) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$e^{iz} = -1.$$

Svolgimento.
Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ il primo membro dell'equazione può essere espresso nella forma seguente

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

di conseguenza l'equazione diventa

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = -1, \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y} \cos x + i\, e^{-y} \sin x = -1$$

Eguagliando rispettivamente la parte reale e qualla immaginaria del primo membro con quelle del secondo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = -1 \\ \\ e^{-y} \sin x = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ammette come soluzioni

$$x_k = \pi + k\, 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le x_k che verificano anche la seconda sono solo quelle per cui $\sin x_k = 0$, mentre deve essere $y = 0$. In definitiva l'equazione ammette come soluzioni

$$z_k = \pi + k 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Punti 9
C.E.: $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$.
Asintoto $y = \dfrac{1}{5}\, x$.
f cresce su $\left(-\infty, -\dfrac{5}{4}\, [2 + \log 5]\right)$, decresce $\left(-\dfrac{5}{4}\, [2 + \log 5]\,, -\dfrac{5}{2}\right)$.
$x_0 = -\dfrac{5}{4}\, [2 + \log 5]$ è punto di massimo assoluto.
f è convessa.
Il grafico è simile a quello della Fila 1.

3. (Punti 12) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x + 25})}{x^2}$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 9) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che la funzione integranda risulta positiva e continua su $[1, +\infty)$, inoltre per x che tende a $+\infty$ tende a zero. Infatti il logaritmo posto al numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva di x. Valutiamo l'ordine di infinitesimo mediante il teorema del confronto asintotico. Dato che al denominatore della funzione data compare x^2, basterà effettuare il confronto con una funzione armonica che abbia esponente minore di due, ed ovviamente maggiore di uno, ad esempio $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, che è integrabile.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Da questo deduciamo che l'infinitesimo al denominatore è "più forte" di quello al numeratore e quindi lo maggiora definitivamente a meno di una costante, ovvero esistono $C > 0$ e $x_0 > 1$ tali che per ogni $x > x_0$

$$0 < \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2} < C\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il teorema del confronto, l'integrale esiste finito.

(b) Calcolo dell'integrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2}\ dx \ = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2}\ dx\,.$$

Effettuiamo nell'integrale il cambio di variabile

$$t^2 = x + 25 \iff x = t^2 - 25; \quad dx = 2t\,dt,$$

per $x = 1$, $t = \sqrt{26}$, per $x = c$, $t = \sqrt{c+25}$. Tenuto conto di questo otteniamo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2}\ dx \ = \lim_{c\to+\infty} \int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}} \log(1+t)\, \frac{2t}{(t^2-25)^2}\ dt.$$

Risolviamo integrando per parti([4])

$$f'(x) = \frac{2t}{(t^2-25)^2} \implies f(x) = -\frac{1}{t^2-25}; \quad g(x) = \log(1+t) \implies g'(x) = \frac{1}{1+t}.$$

[4]
$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx \ = \ [f(x)\,g(x)]_a^b \ - \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx.$$

Quindi

$$\lim_{c\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1}{t^2-25}\,\log(1+t)\right]_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\;+\;\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{(1+t)(t^2-25)}\;dt\right\}=$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left\{-\frac{1}{c}\,\log(1+\sqrt{c+25})\;+\;\log(1+\sqrt{26})\;+\;\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{(1+t)(t^2-25)}\;dt\right\}=$$

$$=\log(1+\sqrt{26})\;+\;\lim_{c\to+\infty}\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{(1+t)(t^2-25)}\;dt\;=$$

La funzione integranda è di tipo razionale. Utilizziamo il metodo di Hermite determinando le costanti reali A, B, C tali che

$$\frac{1}{(1+t)(t^2-25)}\;=\;\frac{A}{t-5}+\frac{B}{t+5}+\frac{C}{1+t}\;=\;\frac{A(t+5)(1+t)+B(t-5)(1+t)+C(t^2-25)}{(1+t)(t^2-25)}$$

Da cui

$$1=A(t+5)(1+t)+B(t-5)(1+t)+C(t^2-25)$$

Questa identità deve valere per ogni $t\in\mathbb{R}$. Al fine di calcolare le costanti A, B, C possiamo assegnare quindi opportuni valori alla variabile t, in particolare assegneremo quelli che annullando alcuni dei binomi facilitano il calcolo.
Per $t=5$ otteniamo $A=\frac{1}{60}$, se $t=-5$ otteniamo $B=\frac{1}{40}$, mentre per $t=-1$, $C=-\frac{1}{24}$. Per questo possiamo scrivere

$$\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{(1+t)(t^2-25)}\;dt\;=$$

$$=\frac{1}{60}\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{t-5}\,dt\;+\;\frac{1}{40}\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{t+5}\,dt\;-\;\frac{1}{24}\int_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\frac{1}{1+t}\,dt\;=$$

$$=\frac{1}{60}\;[\log|t-5|]_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\;+\;\frac{1}{40}\;[\log|t+5|]_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\;-\;\frac{1}{24}\;[\log|1+t|]_{\sqrt{26}}^{\sqrt{c+25}}\;=$$

$$=\frac{1}{60}\,\log(\sqrt{c+25}-5)\;+\;\frac{1}{40}\,\log(\sqrt{c+25}+5)\;-\;\frac{1}{24}\log(1+\sqrt{c+25})\;+$$

$$-\frac{1}{60}\,\log(\sqrt{26}-5)\;-\;\frac{1}{40}\,\log(\sqrt{26}+5)\;+\;\frac{1}{24}\,\log(1+\sqrt{26})\;=$$

$$=\log\frac{(\sqrt{c+25}-5)^{\frac{1}{60}}\,(\sqrt{c+25}+5)^{\frac{1}{40}}}{(1+\sqrt{c+25})^{\frac{1}{24}}}\;-\;\frac{1}{60}\,\log(\sqrt{26}-5)\;-\;\frac{1}{40}\,\log(\sqrt{26}+5)\;+\;\frac{1}{24}\,\log(1+\sqrt{26}).$$

Tenuto conto che

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{(\sqrt{c+25}-5)^{\frac{1}{60}}\,(\sqrt{c+25}+5)^{\frac{1}{40}}}{(1+\sqrt{c+25})^{\frac{1}{24}}}\;=\;\lim_{c\to+\infty}\frac{c^{\frac{1}{120}+\frac{1}{80}}(\sqrt{1+\frac{25}{c}}-\frac{5}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{60}}\,(\sqrt{1+\frac{25}{c}}+\frac{5}{\sqrt{c}})^{\frac{1}{40}}}{(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{1+\frac{25}{c}})^{\frac{1}{24}}c^{\frac{1}{48}}}\;=\;1,$$

perchè $\frac{1}{120}+\frac{1}{80}=\frac{1}{48}$, otteniamo infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+25})}{x^2}\ dx \ = \ -\frac{1}{60}\log(\sqrt{26}-5) \ - \ \frac{1}{40}\log(\sqrt{26}+5) \ + \ \frac{23}{24}\log(1+\sqrt{26})\,.$$

4. (Punti 6) Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^7\left[\sin^2\frac{3}{n^2} \ - \ \log\left(1 \ + \ \frac{9}{n^4}\right)\right]$$

Svolgimento

Il termine racchiuso tra le parentesi è infinitesimo in quanto risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^2\frac{3}{n^2}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\log\left(1+\frac{9}{n^4}\right) \ = \ 0.$$

Stabiliamo il suo ordine di infinitesimo considerando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che vi compaiono.

$$\sin t = t+\frac{1}{6}t^3+o(t^3).$$

Quindi per $t=\frac{3}{n^2}$

$$\sin^2\frac{3}{n^2} \ = \ \frac{9}{n^4}-\frac{27}{n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

Mentre da

$$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$$

ricaviamo con $t=\frac{9}{n^4}$

$$\log\left(1+\frac{9}{n^4}\right)=\frac{9}{n^4}+\frac{81}{2n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right).$$

Tenuto conto di queste eguaglianze otteniamo

$$\sin^2\frac{3}{n^2}-\log\left(1+\frac{9}{n^4}\right) \ = \ \frac{27}{2}\frac{1}{n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right).$$

Il termine generale della serie si può quindi scrivere nella forma

$$a_n=n^7\left[\frac{27}{2}\frac{1}{n^8}+o\left(\frac{1}{n^8}\right)\right]=\frac{27}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dato che la serie risulta con termini definitivamente positivi, possiamo applicare il teorema del confronto asintotico confrontando a_n con la serie armonica $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{27}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{27}{2}.$$

Possiamo concludere che la serie data è divergente, dato che si comporta come la serie armonica con esponente 1.