Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 20 Luglio 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione

$$2 \cdot 6^n \, < \, 7^n \, + \, 5^n, \;\; n \geq 2.$$

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin 3x^2 \; - \; x^3 \log x}{e^{-8x^2} \; - \; \cos 4x}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) \; = \; \sqrt[3]{8\, x^3 \; - \; 27},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare l'intergale

$$\int \log \frac{2x \, + \, 3}{x \, + \, 2} \;\; dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 8) Dimostrare per induzione

$$2 \cdot 6^n < 7^n + 5^n, \;\; n \geq 2.$$

Svolgimento

Per $n = 2$ la diseguaglianza è verificata: $72 < 74$. Proviamo l'induttività della proposizione.

$$2\,6^{n+1} = 2\,6^n\,6 <$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$< 6\,(7^n + 5^n)$$

Dobbiamo provare che

$$6\,(7^n + 5^n) < 7^{n+1} + 5^{n+1}.$$

Ovvero

$$6 \cdot 5^n - 5^{n+1} < 7^{n+1} - 6 \cdot 7^n \iff 6 \cdot 5^n - 5 \cdot 5^n < 7 \cdot 7^n - 6 \cdot 7^n \iff 5^n < 7^n,$$

che è sempre vera. Quindi la tesi è dimostrata.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x^2 - x^3 \log x}{e^{-8x^2} - \cos 4x}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin 3\,x^2 = 3x^2 + o(x^2)$$

$$e^{-8x^2} = 1 - 8x^2 + 32x^4 + o(x^4)$$

$$\cos 4x = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}\,x^4 + o(x^4)$$

$$e^{-8x^2} - \cos 4x = \frac{64}{3}\,x^4 + o(x^4)$$

Osserviamo che $x^3 \log x = o(x^2)$ perchè

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^3 \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} x \log x = 0,$$

di conseguenza

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x^2 - x^3 \log x}{e^{-8x^2} - \cos 4x} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2 + o(x^2)}{\frac{64}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2}{\frac{64}{3}x^4} = +\infty$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{8\,x^3 - 27},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è tutta la retta reale.
Osserviamo che $f(x) > 0$ per $x > \frac{3}{2}$, $f(x) < 0$ per $x < \frac{3}{2}$, mentre $f(\frac{3}{2}) = 0$. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
Determiniamo gli asintoti del tipo $y = mx + q$ all'infinito.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 27}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{8x^3 - 27}{x^3}} = 2.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{8x^3 - 27} - 2x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} 2x \sqrt[3]{1 - \frac{27}{8x^3}} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} 2x \left[\sqrt[3]{1 - \frac{27}{8x^3}} - 1\right].$$

Applichiamo lo sviluppo di Taylor: $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t)$ tenendo presente che per x che tende ad infinito $t = -\frac{1}{x^3}$ tende a zero:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2x \left[1 - \frac{27}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1\right] = 0.$$

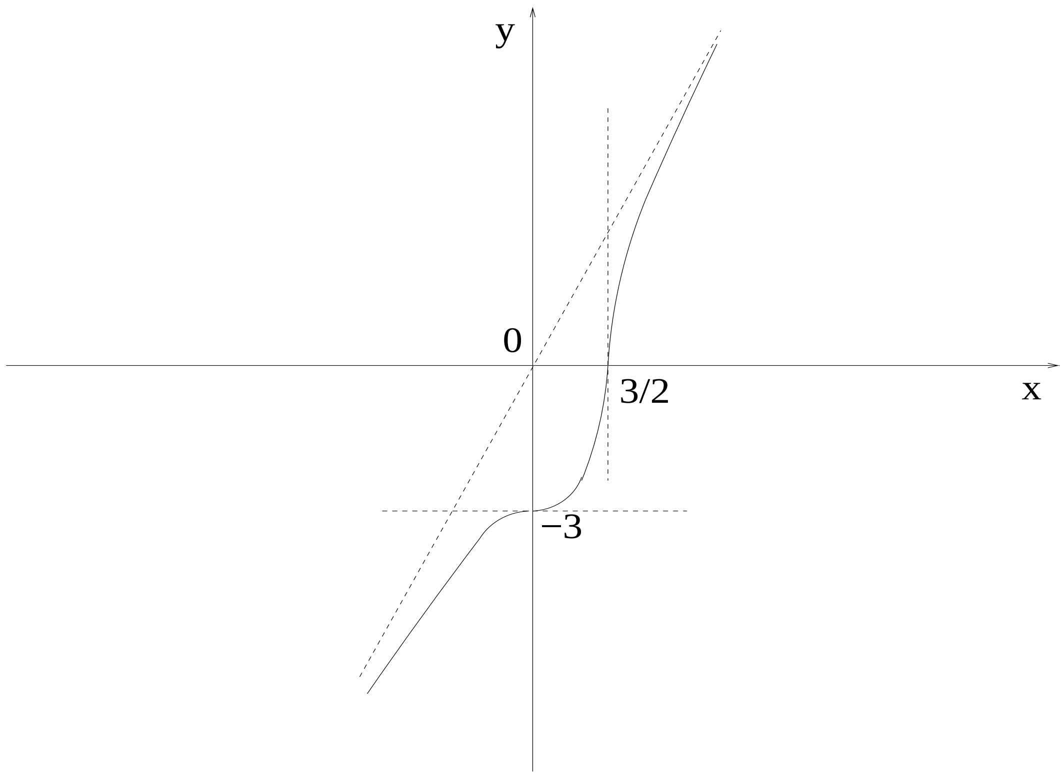
Per x che tende a $\pm\infty$ l'asintoto ha per equazione $y = 2x$.
Calcoliamo ora la derivata prima per stabilire la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 - 27)^2}}$$

È evidente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ (ed ovviamente $x \neq \frac{3}{2}$), mentre $f'(0) = 0$.
Inoltre $\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = +\infty$.
Di conseguenza la funzione è monotona crescente su $(-\infty, \frac{3}{2})$ e su $(\frac{3}{2}, +\infty)$, ma come abbiamo visto $f(x) > 0$ per $x > \frac{3}{2}$, $f(x) < 0$ per $x < \frac{3}{2}$, mentre $f(\frac{3}{2}) = 0$, possiamo quindi affermare che f è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Nel punto $x = 0$ ammette un flesso.
Studiamo la convessità e la concavità di f calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-432\,x}{\sqrt[3]{(8x^3 - 27)^2}(8x^3 - 27)}.$$

Il seguente grafico riassume in breve l'andamento del segno di f'' e gli intervalli di concavità o convessità.



bigskip
4. (punti 8) Calcolare l'intergale

$$\int \log \frac{2x + 3}{x + 2} \; dx.$$

Svolgimento.

Applichiamo la formula di integrazione per parti.

$$\int \log \frac{2x\,+\,3}{x\,+\,2}\;\; dx = \int \log(2x+3)\; dx \;-\; \int \log(x+2)\; dx \;=$$

$$= x\, \log(2x+3)\; - \int \frac{2x}{2x+3}\; dx \;-\; x\, \log(x+2)\; +\; \int \frac{x}{x+2}\; dx \;=$$

$$=\; x\, \log \frac{2x+3}{x+2}\; -\; \int \frac{2x+3-3}{2x+3}\; dx\; +\; \int \frac{x+2-2}{x+2}\; dx\; =$$

$$=\; x\, \log \frac{2x+3}{x+2}\; -\; \int \left(1\; -\; 3\, \frac{1}{2x+3}\right)\; dx\; +\; \int \left(1\; -\; 2\, \frac{1}{x+2}\right)\; dx\; =$$

$$=\; x\, \log \frac{2x+3}{x+2}\; -\; x\; -\; \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+3}\; dx\; +\; x\; -\; 2 \int \frac{1}{x+2}\; dx\; =$$

$$=\; x\, \log \frac{2x+3}{x+2}\; -\; \frac{3}{2} \log(2x+3)\; +\; 2\, \log(x+2)\; +\; C.$$