Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 19 gennaio 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - 4\,a_n + 3, & n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 5, \end{cases}$$

a) dimostrare che risulta $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 5$;

b) dimostrare che è monotona crescente;

c) calcolarne il limite.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[2x^2 - \sin 2x^2]^2}{e^{x^{12}} - 1}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{5x+1}{x-1}},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare

$$\int \log(9 + 25\,x^2)\;dx$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n^2 - 4\,a_n + 3, \quad n \in \mathbb{N} \\ a_0 &= 5, \end{cases}$$

a) dimostrare che risulta $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 5$;

b) dimostrare che è monotona crescente;

c) calcolarne il limite.

Svolgimento.

a). Dimostriamo per induzione la proposizione: $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 5$. Il primo passo è ovvio perché $a_0 = 5$. Proviamo che la proposizione è induttiva, ovvero che $a_n \geq 5$ implica $a_{n+1} \geq 5$. Questo significa

$$a_n^2 - 4a_n + 3 \geq 5 \iff a_n^2 - 4a_n - 2 \geq 0.$$

Si tratta di un polinomio di secondo grado nella variabile a_n, che risulta positivo negli intervalli complementari all'intervallo delle radici reali che sono $2 - \sqrt{6}$ e $2 + \sqrt{6}$. In particolare è positivo per $a_n \geq 2 + \sqrt{6}$. Questa è verificata perché per l'ipotesi induttiva $a_n \geq 5$ e $5 \geq 2 + \sqrt{6}$.

b) Per provare la monotonia in questo caso possiamo procedere nei due modi seguenti, entrambi applicano il principio di induzione.

Iniziamo osservando che $a_0 < a_1$ in quanto $a_0 = 5$ e $a_1 = 8$. Per provare l'induttivitá della proposizione, nel primo caso si considera la funzione associata alla definizione ricorsiva della successione. Questo è possibile perché la dipendenza da n non compare in essa in maniera esplicita. Consideriamo quindi la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 3$. La sua derivata è $f'(x) = 2x - 4$, che risulta positiva per $x > 2$. Quindi f è monotona crescente per $x > 2$. Questo significa che per ogni x_1, $x_2 > 2$: $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Applichiamo questo risultato alla successione: se a_{n-1}, $a_n > 2$ allora $a_{n-1} < a_n$ implica $f(a_{n-1}) < f(a_n)$. Ció è verificato perché, per quanto dimostrato nel punto a), per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 5$ e quindi è maggiore di 2. Di conseguenza essendo $a_{n+1} = f(a_n)$ e $a_n = f(a_{n-1})$ da $a_{n-1} < a_n$ segue $a_n < a_{n+1}$.

L'altra strada che possiamo percorrere è dedurre $a_n < a_{n+1}$ dall'ipotesi $a_{n-1} < a_n$ scrivendo direttamente l'espressione e semplificando:

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1}^2 - 4a_{n-1} + 3 < a_n^2 - 4a_n + 3 = a_{n+1} &\iff \\ \iff a_{n-1}^2 - 4a_{n-1} < a_n^2 - 4a_n &\iff \\ \iff 4a_n - 4a_{n-1} < a_n^2 - a_{n-1}^2 &\iff \\ \iff 4(a_n - a_{n-1}) < (a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) \iff 4 < (a_n + a_{n-1}) & \end{aligned}$$

L'ultima maggiorazione è vera perché abbiamo assunto $a_{n-1} < a_n$ ed inoltre, come abbiamo visto sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 5$, di conseguenza $a_n + a_{n-1} \geq 10 > 4$.

c) Per quanto provato nel punto precedente e per il teorema di regolaritá delle successioni monotone possiamo affermare che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Ricordiamo che in tal caso, poiché la successione è crescente si ha che $L = \sup a_n$. Il problema è ora stabilire se $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = +\infty$. Se fosse $L \in \mathbb{R}$, dovrebbe soddisfare l'equazione che si ottiene passando al limite al primo ed al secondo membro della relazione ricorsiva che definisce la succesione, ovvero

$$L = L^2 - 4\,L + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad L^2 - 5\,L + 3 = 0$$

Risolvendo $L_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ e $L_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$. Nessuno di questi due valori puó essere accettato perché sono entrambi minori di $a_0 = 5$ e la successione come abbiamo visto è crescente. Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to0} \frac{[2x^2 - \sin 2x^2]^2}{e^{x^{12}} - 1}.$$

Svolgimento.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, risolviamo l'indeterminazione considerando gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espresione.

$$\begin{aligned} \sin t = t - \frac{1}{6}\,t^3 + o(t^3),\ \text{ prendendo } t = 2\,x^2, \\ \sin 2x^2 = 2x^2 - \frac{4}{3}\,x^6 + o(x^6). \\ e^t = 1 + t + o(t),\ \text{ prendendo } t = x^{12}, \\ e^{x^{12}} = 1 + x^{12} + o(x^{12}) \end{aligned}$$

Da questo

$$\begin{aligned} [2x^2 - \sin 2x^2]^2 &= \left[2x^2 - 2x^2 + \frac{4}{3}\,x^6 + o(x^6)\right]^2 = \left[\frac{4}{3}\,x^6 + o(x^6)\right]^2 = \\ &= \frac{16}{9}\,x^{12} + \frac{8}{3}\,x^6\,o(x^6) + o(x^{12}) = \frac{16}{9}\,x^{12} + + o(x^{12}). \\ e^{x^{12}} - 1 &= 1 + x^{12} + o(x^{12}) - 1 = x^{12} + o(x^{12}). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[2x^2 - \sin 2x^2]^2}{e^{x^{12}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{16}{9}\,x^{12} + o(x^{12})}{x^{12} + o(x^{12})} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{16}{9}\,x^{12}}{x^{12}} = \frac{16}{9}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{5x+1}{x-1}},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

a) Il campo di esistenza di f è dato dai valori che rendono diverso da zero il valore del denominatore della frazione che compare come esponente di e, ovvero $x \neq 1$. Vediamo se $x = 1$ costituisce un asintoto verticale per la funzione calcolando i limiti $\lim_{x\to 1+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1-} f(x)$. Poiché per x che tende a 1 da destra $x - 1$ tende a zero per valori positivi, la frazione $\frac{5x+1}{x-1}$ assume la forma $\frac{1}{0+}$, ovvero tende a $+\infty$, quindi il limite assume la forma $e^{+\infty} = +\infty$. Mentre per per x che tende a 1 da sinistra $x - 1$ tende a zero per valori negativi, la frazione $\frac{5x+1}{x-1}$ assume la forma $\frac{1}{0-}$, ovvero tende a $-\infty$, ed il limite assume la forma $e^{-\infty} = 0$. Per questo possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = 0.$$

Quindi $x = 1$ è un asintoto verticale.
Per x che tende a $\pm\infty$ risulta

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = e^5, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = e^5.$$

$y = e^5$ è un asintoto orizzontale.
b) Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia di f.

$$f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}\, e^{\frac{5x+1}{x-1}}.$$

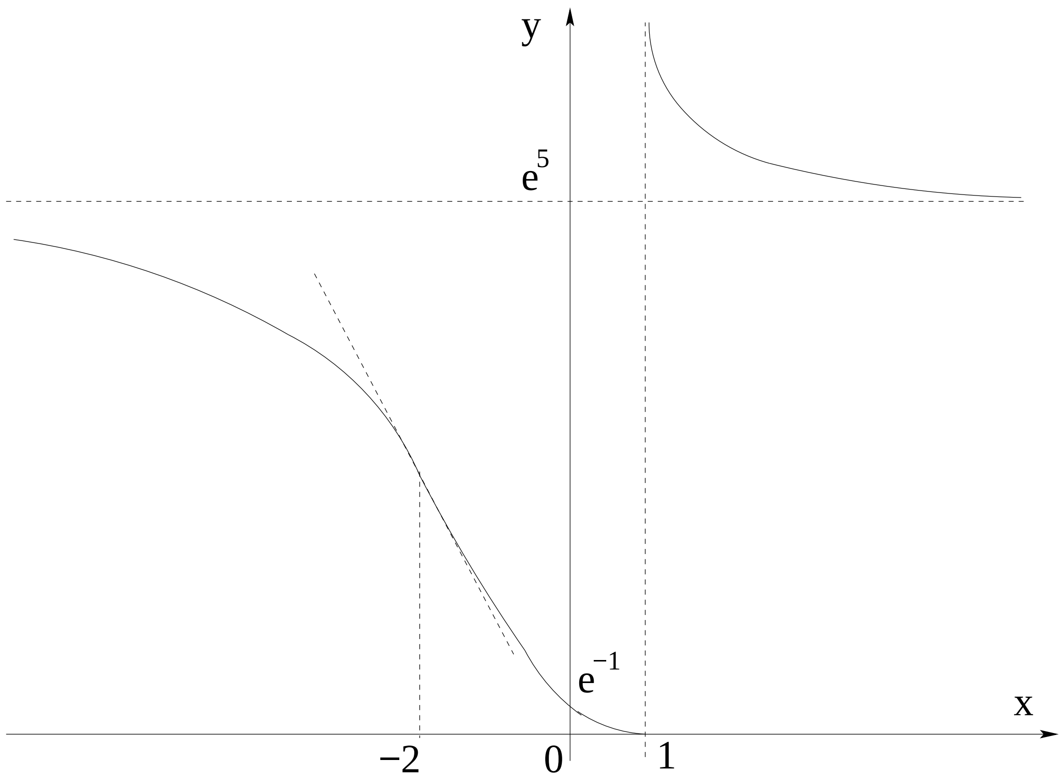
È evidente che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f'(x) < 0$. Quindi f risulta decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ risulta $f(x) > 0$. Quindi il valore 0 è l'estremo inferiore di f ma non il minimo.

c) Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli di concavitá e convessitá di f.

$$f''(x) \;=\; \left[\frac{36}{(x-1)^4} \;+\; \frac{12}{(x-1)^3}\right] e^{\frac{5x+1}{x-1}} \;=\; 12\,\frac{x+2}{(x-1)^4}\,e^{\frac{5x+1}{x-1}}$$

Per $f''(x) < 0$ per $x < -2$, mentre $f''(x) > 0$ per $x > -2$, $x \neq 1$. Quindi f è concava sull'intervallo $(-\infty, -2)$, convessa su $(-2, 1)$ e $(1, +\infty)$. Il punto $x = -2$ è di flesso.

d) In base a quanto trovato sopra possiamo tracciare il seguente grafico.



4. (punti 8) Calcolare

$$\int \log(9\,+\,25\,x^2)\;\,dx$$

Svolgimento.

Applichiamo la formula di integrazione per parti([1]) prendendo
$f'(x) = 1$ e $g(x) = \log(9\,+\,25\,x^2)$,
per cui
$f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{50x}{9+25\,x^2}$.
Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
\int \log(9\,+\,25\,x^2)\;\,dx &= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\int \frac{50x^2}{9\,+\,25\,x^2}\;\,dx\,= \\
&= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\int \frac{25x^2+9-9}{9\,+\,25\,x^2}\;\,dx\,= \\
&= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\int \left[1\,-\,\frac{9}{9\,+\,25\,x^2}\right]\;\,dx\,= \\
&= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\int 1\,dx\;+\,2\int \frac{9}{9\,+\,25\,x^2}\;\,dx\,= \\
&= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\,x\;+\,2\int \frac{1}{1\,+\,\frac{25}{9}\,x^2}\;\,dx\,= \\
&= x\,\log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\,x\;+\,\frac{6}{5}\int \frac{5}{3}\,\frac{1}{1\,+\,\left(\frac{5}{3}\,x\right)^2}\;\,dx\,= \\
&= \log(9\,+\,25\,x^2)\,-\,2\,x\;+\,\tfrac{6}{5}\,\arctan\left(\tfrac{5}{3}\,x\right)\,+\,C.
\end{aligned}$$

---

[1]
$$\int f'(x)\,g(x)\;\,dx\,=\,f(x)\,g(x)\,-\int f(x)\,g'(x)\;\,dx.$$