Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 8 Giugno 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2\,a_n + 9}{a_n + 5} & n \in \mathbb{N} \\ \\ a_0 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

studiare l'andamento e calcolare il limite.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 x^3 \sin x^2 \; dx$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log \left|1 - 2\,e^{-2x}\right|,$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Stabilire il comportamento della serie.

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n! - n^2}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \dfrac{2\,a_n\,+\,9}{a_n\,+\,5} \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ a_0 & = & \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

studiare l'andamento e calcolare il limite.

Svolgimento.

Si vede facilmente per induzione che la successione è sempre positiva, quindi è ben definita. Dimostriamo che è limitata superiormente. Per fare questo possiamo procedere in due modi. Il primo in maniera intuitiva, ovvero osserviamo che

$$\frac{2\,a_n\,+\,9}{a_n\,+\,5} = \frac{2\,a_n}{a_n\,+\,5} + \frac{9}{a_n\,+\,5} \le 2\,+\,2 = \,4.$$

Il secondo consiste nel valutare la funzione associata alla definizione della successione

$$f(x) = \frac{2\,x\,+\,9}{x\,+\,5}.$$

Dalla derivata prima

$$f'(x) = \frac{1}{(x\,+\,.5)^2}$$

ricaviamo che, poichè $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq -5$, la funzione è monotona crescente per $x > -5$ quindi per $x > 0$. Inoltre si vede facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x\,+\,9}{x\,+\,5} = 2,$$

di conseguenza per ogni $x > 0$ otteniamo $f(x) < 2$, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{2\,a_n\,+\,9}{a_n\,+\,5} \;<\; 2.$$

Verifichiamo che la successione è monotona crescente per induzione. Infatti $a_0 = \frac{1}{4} < a_1 = \frac{20}{11}$ ed inoltre

$$a_{n-1} < a_n \implies a_n < a_{n+1},$$

perchè, come abbiamo visto sopra, la funzione associata alla successione è crescente quindi

$$a_{n-1} < a_n \implies a_n = f(a_{n-1}) < a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il teorema di regolarità delle funzioni monotone la successione ammette limite reale L. Questo è una soluzione dell'equazione

$$L = \frac{2\,L\,+\,9}{L\,+\,5} \quad\iff\quad L^2 + 3L - 9 = 0,$$

le cui radici sono

$$L_1 \;=\; -\frac{3}{2}(1+\sqrt{5}), \quad L_2 \;=\; \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1).$$

L_1 non è accettabile perchè essendo negativa non è punto di accumulazione della successione. Quindi il limite della successione è L_2.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 x^3 \,\sin x^2 \;\; dx$$

Svolgimento.
Effettuiamo il cambio di variabile $t = x^2$, quindi $dt = 2x\,dx$, per $x = 0$ si ha che $t = 0$, mentre per $x = 2$ abbiamo $t = 4$. Sostituendo

$$\int_0^2 x^3 \,\sin x^2 \;\; dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^4 t\,\sin t \;\; dt.$$

Integriamo per parti

$$\frac{1}{2}\int_0^4 t\,\sin t \;\; dt \;=\; \frac{1}{2}\left[-t\cos t\right]_0^4 + \frac{1}{2}\int_0^4 \cos t \;\; dt \;=\; -2\cos 4 + \frac{1}{2}\left[\sin t\right]_0^4 \;=\; -2\,\cos 4 + \frac{1}{2}\sin 4.$$

In definitiva possiamo scrivere

$$\int_0^2 x^3 \,\sin x^2 \;\; dx \;=\; -2\cos 4 \,+\, \frac{1}{2}\,\sin 4.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \log\left|1 \;-\; 2\,e^{-2x}\right|,$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento

Il campo di esistenza della funzione è dato dai valori di x tali che $1 - 2e^{-2x} \neq 0$, ovvero $x \neq \log\sqrt{2}$. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\log\sqrt{2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

L'espressione della funzione può essere esplicitata nel modo che segue

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \log(1-2e^{-2x}), & \text{se } 1-2e^{-2x}>0 \iff x>\log\sqrt{2} \\ \\ \log(2e^{-2x}-1), & \text{se } 2e^{-2x}-1>0 \iff x<\log\sqrt{2}. \end{cases}$$

Osserviamo che $f(x)<0$ per $0<1-2e^{-2x}<1$, quindi per ogni $x>\log\sqrt{2}$, oppure $0<2e^{-2x}-1<1$ quindi $e^{-2x}<1$ per ogni $0<x<\log\sqrt{2}$. Inoltre $f(0)=0$.
La funzione ammette come asintoto per x che tende a $+\infty$ la retta $y=0$. Calcoliamo l'asintoto pre x che tende a $-\infty$.

$$m \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{\log(2e^{-2x}-1)}{x} \;=\; \lim_{x\to-\infty}\frac{-4\,e^{-2x}}{2e^{-2x}-1} \;=\; -2.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema dell'Hospital.

$$q=\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}\log(2e^{-2x}-1)\;+\;2x\;=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\log\left\{2e^{-2x}\left[1\;-\;\frac{1}{2e^{-2x}}\right]\right\}\;+\;2x\;=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\log 2e^{-2x}\;+\;\log\left[1\;-\;\frac{1}{2e^{-2x}}\right]\;+\;2x\;=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\log 2\;-\;2x\;+\;2x\;=\log 2.$$

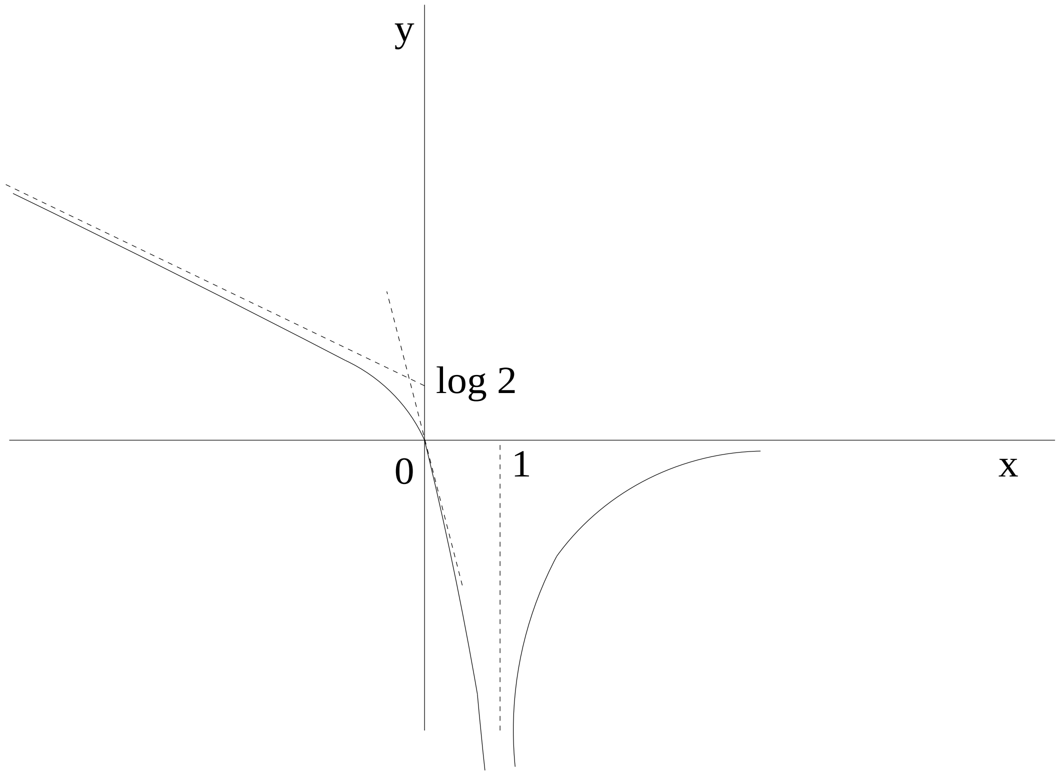
L'asintoto per x che tende a $-\infty$ é la retta $y=-2x+\log 2$.
Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{4\,e^{-2x}}{1-2e^{-2x}}, & \text{se } x>\log\sqrt{2} \\ \\ -\dfrac{4e^{-2x}}{2e^{-2x}-1}, & \text{se } x<\log\sqrt{2}. \end{cases}$$

Risulta evidente che $f'(x)>0$ per ogni $x>\log\sqrt{2}$, mentre $f'(x)<0$ per $x<\log\sqrt{2}$. Per cui la funzione è monotona crescente sul $(\log\sqrt{2},+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,\log\sqrt{2})$.
Calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{-8\,e^{-2x}}{(1-2e^{-2x})^2}, & \text{se } x>\log\sqrt{2} \\ \\ \dfrac{-8e^{-2x}}{(2e^{-2x}-1)^2}, & \text{se } x<\log\sqrt{2}. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x)<0$ per ogni $x\neq\log\sqrt{2}$, per questo f è concava in $(-\infty,\log\sqrt{2})$ e in $(\log\sqrt{2},+\infty)$.
Possiamo a questo punto tracciare il seguente grafico.



4. (punti 8) Stabilire il comportamento della serie.

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n! - n^2}$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi, possiamo quindi applicare il criterio del rapporto valutando il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!-(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n!-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2\,\frac{n! - n^2}{(n+1)! - (n+1)^2} =$$

$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{n^2}{n!}}{1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Quindi la serie è convergente.
In un passaggio del calcolo del limite effettuato sopra abbiamo utilizzato il fatto che

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} \le \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1}{(n-2)!} = 0.$$