Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 6 Luglio 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2\,a_n^2 + 1}{a_n + 4} & n \in \mathbb{N} \\ \\ a_0 = 4, \end{cases}$$

studiare l'andamento e calcolare il limite.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{4}{x}} - 1}{\log\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 2\sin\frac{1}{x}}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare in quali punti non è derivabile;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare

$$\int e^{2x}\ \log(1 + e^x)\ dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{2\,a_n^2\,+\,1}{a_n\,+\,4} \qquad n \in \mathbb{N} \\ \\ a_0 &= 4, \end{cases}$$

studiare l'andamento e calcolare il limite.

Svolgimento.

Si vede facilmente per induzione che la successione è positiva: $a_0 > 0$ e $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$. Quindi la successione risulta anche ben definita in quanto il denominatore della frazione non si annulla mai.
Studiamo la monotonia della successione considerando la funzione associata

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+4}.$$

La sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2x^2+16x-1}{(x+4)^2}.$$

Risulta che $2x^2+16x-1 > 0$ per $x < -\dfrac{8+\sqrt{66}}{2}$ oppure $x > \dfrac{\sqrt{66}-8}{2}$. Essendo $\dfrac{\sqrt{66}-8}{2} < 0$ la funzione è monotona crescente.
Si ha pertanto che $a_{n-1} < a_n$ implica $a_n = f(a_{n-1}) < a_{n+1} = f(a_n)$. Il primo passo è verificato perchè $a_0 = 4 < a_1 = \frac{33}{8}$. Per il principio di induzione la successione è monotona crescente, ammette quindi limite. Se tale limite fosse un valore L reale dovrebbe risolvere l'equazione che si ottiene passando al limite nella relazione ricorsiva, ovvero

$$L = \frac{2L^2+1}{L+4} \iff L^2-4L+1 = 0$$

Le radici sono $L_1 = 2-\sqrt{3}$ e $L_2 = 2+\sqrt{3}$, entrambi minori di 4. Come abbiamo visto sopra $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 4$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1\,+\,\frac{3}{x}\right)^{\frac{4}{x}}-1}{\log\left(1\,+\,\frac{2}{x}\right)\,-\,2\,\sin\frac{1}{x}}.$$

Svolgimento.

Posto $x = \frac{1}{t}$, per $x \to +\infty$ risulta $t \to 0^+$, quindi

$$\lim_{t \to 0+} \frac{(1\,+\,3t)^{4t} - 1}{\log(1\,+\,2t)\,-\,2\,\sin t}.$$

Tenendo conto della definizione di *logaritmo*

$$(1+3t)^{4t} \;=\; e^{4t\,\log(1+3t)},$$

del fatto che

$$\lim_{t \to 0+} 4t\,\log(1+3t) = 0$$

deduciamo che il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$.
Per risolvere l'indeterminazione ricorriamo agli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite. Lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale ci consente di scrivere

$$(1+3t)^{4t} \;=\; e^{4t\,\log(1+3t)} = 1 + 4t\log(1+3t) + o(4t\,\log(1+3t)) =$$

(utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo)

$$= 1 + 4t(3t + o(t)) + o(4t\,\log(1+3t)) = 1 + 12t^2 + o(t^2)$$

$$\log(1+2t) = 2t - 2t^2 + o(t^2).$$

$$2\sin t = 2t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{t \to 0+} \frac{(1\,+\,3t)^{4t} - 1}{\log(1\,+\,2t)\,-\,2\,\sin t} \;=\; \lim_{t \to 0+} \frac{12t^2 + o(t^2)}{-2t^2 + o(t^2)} = -6.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{1-x}},$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare in quali punti non è derivabile;

c) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Risulta che $f(x) > 0$ per i valori di x che risolvono

$$\begin{cases} 1 - \sqrt[3]{x} > 0 \\ \\ 1 - x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{x} < 0 \\ \\ 1 - x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 > x \\ \\ 1 > x \end{cases} \vee \begin{cases} 1 < x \\ \\ 1 < x \end{cases} \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Da cui deduciamo che la funzione è strettamente positiva nel suo dominio. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio effettuando il cambio di variabile $t = 1 - x$ ed utilizzando lo sviluppo di Taylor della funzione radice cubica: $\sqrt[3]{1-t} = 1 - \frac{t}{3} + o(t)$

$$\lim_{x \to 1\mp} f(x) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{1 - \sqrt[3]{1-t}}{\sqrt[3]{t}} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{1 - 1 + \frac{t}{3} + o(t)}{\sqrt[3]{t}} = 0.$$

La funzione non ha minimo ma $\inf f = 0$.
Mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right)}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}} = 1.$$

Determiniamo gli intervalli di monotonia studiando il segno della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{(1-x)^4}\sqrt[3]{x^2}}.$$

Da cui

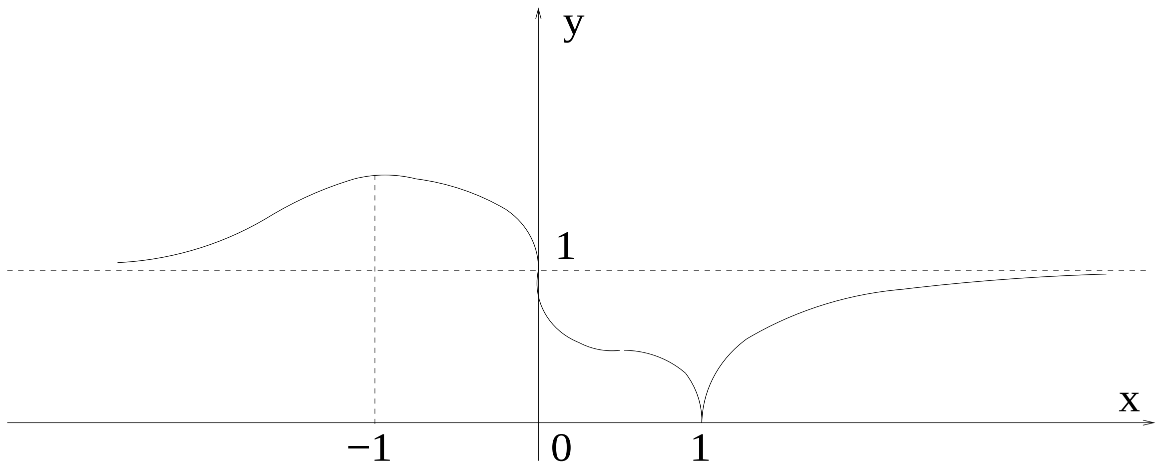
$$f'(x) > 0 \iff \sqrt[3]{x} - 1 > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x < -1 \vee x > 1.$$

$$f'(x) < 0 \iff -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1.$$

Quindi f risulta monotona crescente sulla semiretta $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, decrescente su $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. $f'(-1) = 0$, dunque il punto $x = -1$ è non solo di massimo relativo ma anche assoluto.
Poichè f' ha singolaritá in $x = 0$ e $x = 1$ ne studiamo il comportamento nell'intorno di questi punti calcolando

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1-} f'(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Tenuto conto di quanto visto possiamo tracciare il seguente grafico.



4. (punti 8) Calcolare

$$\int e^{2x}\ \log(1\,+\,e^x)\ dx.$$

Svolgimento.

Effettuiamo il cambiamento di variabile $t = e^x$, quindi $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}dt$. Sostituendo

$$\int t^2\ \log(1+t)\,\frac{1}{t}\,dt\ =\ \int t\ \log(1+t)\ dt\ =$$

(integrando per parti)

$$=\frac{1}{2}\ t^2\ \log(1+t)\ -\ \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t}\,dt.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{t^2}{1+t}\,dt\ =\int \frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt\ =$$

$$=\int (t-1)\,dt\ \ +\int \frac{1}{1+t}\,dt\ =\ \frac{1}{2}\,t^2\ -\ t\ +\ \log|1+t|\ +C.$$

Possiamo allora scrivere

$$\int t^2\ \log(1+t)\,\frac{1}{t}\,dt\ =\frac{1}{2}\ t^2\ \log(1+t)\ -\ \frac{1}{4}\,t^2\ +\ \frac{t}{2}\ -\ \frac{1}{2}\log|1+t|\ +C.$$

Quindi

$$\int e^{2x} \ \log(1 \ + \ e^x) \ \ dx \ = \ \frac{1}{2} \ e^{2x} \ \log(1+e^x) \ - \ \frac{1}{4} e^{2x} \ + \ \frac{e^x}{2} \ - \ \frac{1}{2} \log(1+e^x) \ + C.$$