**Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura**

**ESERCIZI DI PREPARAZIONE PER LA PROVA SCRITTA**

**Esercizio 1** Calcolare i valori dei seguenti integrali.

(a)

$$\iint_D \sin[(x^2+y^2)\pi] \; dx\, dy.$$

dove $D = \{(x,y): \; 1 \le x^2+y^2 \; \le 4, \; \frac{\sqrt{3}}{3}\, x \; \le \; y \; \le \; \sqrt{3}x\}$

(b)

$$\iiint_D x^2\, y\, z^3 \; dx\, dy\, dz.$$

dove $D = \{(x,y,z): \; 0 \le z \le \; 1, \; x+y \; \le \; 1, 0 \le x, \, 0 \le y\}$.

(c)

$$\iiint_D x^2\, z \; dx\, dy\, dz.$$

dove $D = \{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \le \; 4, \; \sqrt{x^2+y^2} \; \le \; z, 0 \le x, \, 0 \le y\}$.

(d)

$$\iint_D x\, y \; dx\, dy.$$

dove $D = \{(x,y): \; 0 \; \le y \le \sqrt{4-x^2}, \, 0 \; \le \; y \; \le \; \sqrt{4-(x-2)^2}\}$.

**ESERCIZIO 2** Dati i campi di vettori seguenti, verificare se sono conservativi ed eventualmente determinare i potenziali.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy^3z^4+1, \, 3y^2x^2z^4+2y, \, 4z^3x^2y^3+3z^2)$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy^3z^4+1, \, 3y^2x^2z^4+2x+2x, \, 4z^3x^2y^3+3z^2)$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\, \cos x^2\, \sin y^2, \, 2\sin x^2 \cos y^2)$

(d) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\, \cos x^2\, \sin y^2, \, 2y\sin x^2 \cos y^2)$

(e) $\mathbf{F}(x,y) = (\cos y + \, y\, \cos x, \, -x\sin y + \sin x)$

**ESERCIZIO 3** Calcolare il massimo ed il minimo di ciascuna delle seguenti funzioni sul dominio indicato.

(a) $f(x,y,z) \; = \; x \; + \; y \; + \; z$ su $D = \{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \; \le \; 27\}$.

(b) $f(x,y) \; = \; x^2+y^2+3xy$ su $D = \{(x,y): \; x^2+y^2 \le 1\}$.

**ESERCIZIO 4** Determinare i punti di massimo e di minimo relativo per ciascuna delle seguenti funzioni e dire se sono anche assoluti.

(a) $f(x,y) = x^4+y^4-x^2y^2-18x^2-8y^2$.

(b)$f(x,y) = x^4+y^4-x^2y^2+4x^2-2y^2$.

**ESERCIZIO 5** Data la funzione

$$f(x,y) = x^3+y^2+y+x$$

dimostrare che verifica le ipotesi del *teorema del Dini* in un intorno del punto $(0,0)$ e tracciare il grafico degli zeri in un intorno di esso.

**ESERCIZIO 6** Data la superficie descritta dalla seguente equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t,\theta) &= t^5 \cos\theta \\ y(t,\theta) &= t^5 \sin\theta \quad , \quad 0 \le t \le 1, \;\; 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}. \\ z(t,\theta) &= t^{10} \end{cases}$$

si verifichi che è regolare e se ne calcoli l'area.

**ESERCIZIO 7** Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y,z) \,=\, z\,\mathbf{i} \,+\, y^2\,\mathbf{j} \,+\, z\,\mathbf{k}$$

calcolarne il flusso uscente dalla sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 3.

**RISPOSTE**.

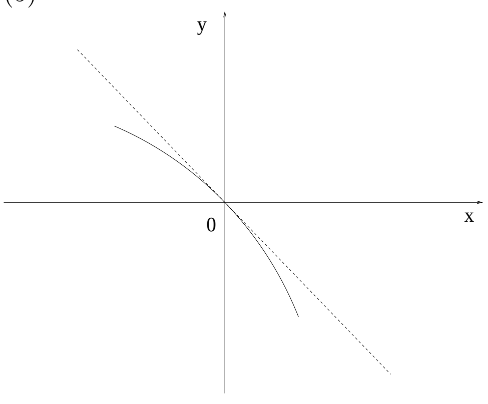
(1a) $-\dfrac{1}{6}$; (1b) $\dfrac{1}{96}$; (1c) $\dfrac{\pi}{6}$; (1d) $\dfrac{37}{12}$.

(2a) $U(x,y,z) = x^2y^3z^4 + x + y^2 + z^3$; (2b) Conservativo; (2c) Non conservativo; (2d) $U(x,y) = \sin x^2 \, \sin y^2$; (2e) $U(x,y) = x\cos y + y \sin x$.

(3a) Max 9 su $(3,3,3)$, min $-9$ su $(-3,-3,-3)$; (3b) Max $\dfrac{5}{2}$ su $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ e su $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, min $-\dfrac{1}{2}$ su $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ e su $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

(4a) Il punto $(0,0)$ è punto di massimo relativo, gli altri sono di sella. Non è di massimo assoluto perché $f(x,0) = x^4 - 18x^2$ è strettamente positiva per $x > \sqrt{18}$ o $x < -\sqrt{18}$, mentre $f(0,0) = 0$.
(4b) I punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono di minimo relativo ma non assoluto perché $f(0,1) = f(0,-1) = 3$ e $f(0,0) = 0$.

(5)




(6) $(5\sqrt{5} - 1)\dfrac{\pi}{24}$.
(7) $36\pi$.