Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2

Prova scritta del 7 Luglio 2015

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Calcolare il valore dell'integrale

$$\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy,$$

dove D è il triangolo ABC del piano avente come vertici i punti di coordinate: $A = (0, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (2, 0)$.

2. (Punti 8) Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo è conservativo e eventualmente calcolarne il potenziale.

$$\mathbf{F}(x, y) = (y\, e^x \cos(y\, e^x) + \alpha y,\; e^x \cos(y\, e^x) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. (Punti 8) Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

4. (Punti 8) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3z^2 x\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + 4x\, \mathbf{k}$$

uscente dalla superficie della sfera

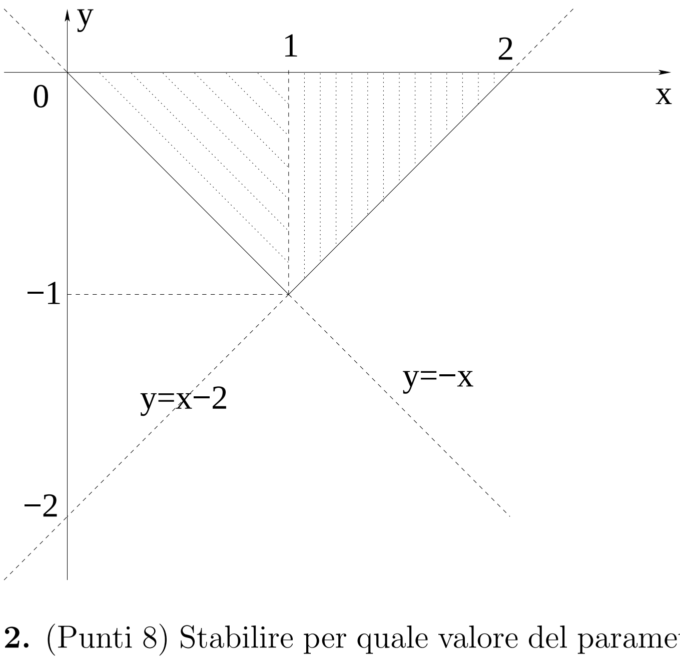
$$S = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}.$$

Risoluzione degli esercizi proposti.

Esercizio 1.
Calcolare il valore dell'integrale
$$\iint_D e^{x+y}\ dx\, dy,$$
dove D è il triangolo ABC del piano avente come vertici i punti di coordinate: $A = (0, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (2, 0)$.

Svolgimento.

Possiamo scomporre D che è un insieme normale come unione dei due domini D_1 e D_2, anch'essi normali, definiti da $D_1 = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq y \leq 0\}$ e $D_2 = \{(x, y) :\ 1 \leq x \leq 2,\ x - 2 \leq y \leq 0\}$ di conseguenza ci riportiamo al calcolo dei seguenti integrali
$$\iint_D e^{x+y}\ dx\, dy = \iint_{D_1} e^{x+y}\ dx\, dy + \iint_{D_2} e^{x+y}\ dx\, dy.$$
Quindi
$$\iint_D e^{x+y}\ dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^0 e^{x+y}\ dy\ + \int_1^2 dx \int_{x-2}^0 e^{x+y}\ dy =$$
$$\int_0^1 e^x [e^y]_{-x}^0\ dx\ + \int_1^2 e^x [e^y]_{x-2}^0\ dx = \int_0^1 e^x(1 - e^{-x})\ dx\ + \int_1^2 e^x(1 - e^{x-2})\ dx =$$
$$\int_0^1 (e^x - 1)\ dx\ + \int_1^2 (e^x - e^{(2x-2)})\ dx = [e^x]_0^1 - 1 + [e^x]_1^2 - \frac{1}{2e^2}[e^{2x}]_1^2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}.$$



2. (Punti 8) Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo è conservativo e eventualmente calcolarne il potenziale.
$$\mathbf{F}(x, y) = (y\, e^x\ \cos(y\, e^x) + \alpha y,\ \ e^x\ \cos(y\, e^x) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento.

Il campo è di classe C^{∞} su di un dominio semplicemente connesso. Possiamo stabilire se è conservativo mediante la regola *delle derivate in croce* ovvero verificando che

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}$$

Essendo

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = e^x \cos(e^x y) - ye^{2x}\sin(e^x y) + \alpha, \qquad \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = e^x \cos(e^x y) - ye^{2x}\sin(e^x y),$$

le derivate in croce sono uguali se $\alpha = 0$.

Calcoliamo ora una primitiva, integrando il campo vettoriale sulla spezzata che congiunge $(0,0)$ a (x,y), unione delle due curve

$$\gamma : \begin{cases} \gamma_1(t) = tx \\ \gamma_2(t) = 0 \end{cases}, t \in [0,1] \ , \qquad \psi : \begin{cases} \psi_1(t) = x \\ \psi_2(t) = ty \end{cases}, t \in [0,1] \ ,$$

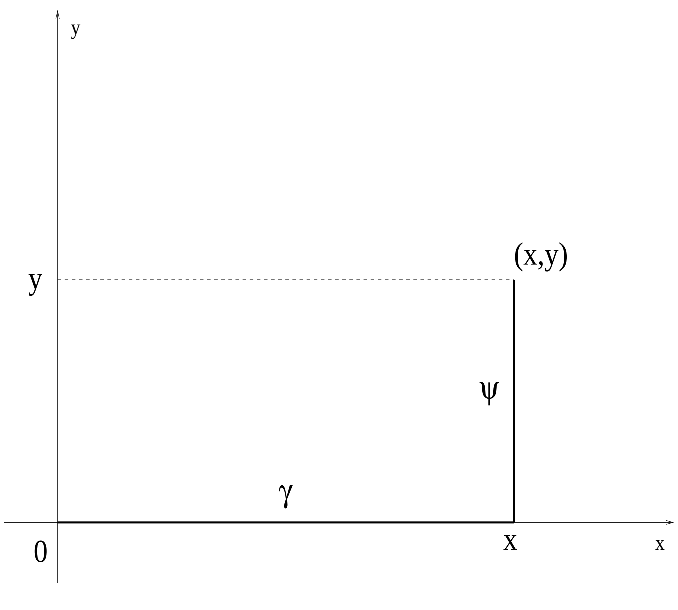
da cui, tenuto conto del fatto che

$$\dot{\gamma} : \begin{cases} \dot{\gamma_1}(t) = x \\ \dot{\gamma_2}(t) = 0 \end{cases}, t \in [0,1] \ , \qquad \dot{\psi} : \begin{cases} \dot{\psi_1}(t) = 0 \\ \dot{\psi_2}(t) = y \end{cases}, t \in [0,1] \ ,$$

l'integrale curvilineo sull'unione dei sostegni delle due curve è

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\gamma)\cdot d\gamma + \int_{\psi} \mathbf{F}(\psi)\cdot d\psi =$$

$$\int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt + \int_0^1 F(\psi(t))\cdot\dot{\psi}(t)\,dt = \int_0^1 y\,e^x\,\cos(yt\,e^x)\ dt \ = \ \sin(ye^x)$$



3. (Punti 8) Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y):\;\; 1 \,\le\, x^2+y^2 \le 4\}.$$

Svolgimento.

La funzione data è continua su tutto R^2 e quindi anche su D. Inoltre D è un dominio di R^2 limitato e chiuso quindi, per il *teorema di Weierstrass*, ammette massimo e minimo. Cerchiamo i punti di massimo e di minimo tra gli zeri del gradiente.
Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) \;=\; (x,\, -y)$$

che si annulla solo in $(0,0)$ che non appartiene al dominio D.
Cerchiamo allora i massimi e i minimi sulla frontiera di D. Questa è costituita dalle due circonferenze C_1 e C_2 di centro $(0,0)$ e rispettivamente di raggi 1 e 2 che possiamo prametrizzare come segue:

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ \\ y(t) = \sin t \end{cases} ,t \in [0,2\pi] \quad , \qquad C_2 : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} ,t \in [0,2\pi] \quad .$$

Considerando la restrizione di f a C_1 si ottiene

$$F_1(t) = f_{C_1} = f(\cos t, \sin t) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 t - \sin^2 t \;+\; 1\right)$$

da cui

$$F'(t) = -2\sin t\,\cos t$$

che si annulla nei punti

$$t_1 = \frac{\pi}{2},\;\; t_2 = \pi,\;\; t_3 = \frac{3}{2}\pi,\;\; t_4 = 2\pi$$

che corrispondono a

$$(x_1,y_1) = (0,1),\;\; (x_2,y_2) = (-1,0),\;\; (x_3,y_3) = (0,-1),\;\; (x_4,y_4) = (1,0).$$

Mentre considerando la restrizione di f a C_2 si ottiene

$$F_2(t) = f_{C_2} = f(2\cos t, 2\sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t \;+\; 1$$

da cui

$$F'(t) = -4\sin t\,\cos t$$

che si annulla nei punti

$$t_5 = \frac{\pi}{2},\;\; t_6 = \pi,\;\; t_7 = \frac{3}{2}\pi,\;\; t_8 = 2\pi$$

che corrispondono a

$$(x_5, y_5) = (0, 2),\ \ (x_6, y_6) = (-2, 0),\ \ (x_7, y_7) = (0, -2),\ \ (x_8, y_8) = (2, 0).$$

Calcolando il valore di f su tutti questi punti

$$f(0, \pm 1) = 0,\ \ f(\pm 1, 0) = 1,\ \ f(0, \pm 2) = -\frac{3}{2},\ \ f(\pm 2, 0) = \frac{5}{2}.$$

In definitica il massimo di f è $\frac{5}{2}$ assunto nei punti $(\pm 2, 0)$ ed il minimo è $-\frac{3}{2}$ assunto nei punti $(0, \pm 2)$.

4. (Punti 8) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 3z^2 x\ \mathbf{i}\ +\ yz\ \mathbf{j}\ +\ 4x\ \mathbf{k}$$

uscente dalla superficie della sfera

$$S = \{(x, y, z) :\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Svolgimento.

Per calcolare il flusso del campo vettoriale usciente dalla sfera, ovvero

$$\Phi(F, \partial S) = \iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e} dS$$

applichiamo la *formula della divergenza o di Gauss*

$$\iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\ dx\, dy\, dz = \iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_e} dS.$$

Quindi, poiché

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3z^2 + z$$

calcoliamo l'integrale sulla sfera S passando in coordinate sferiche

$$\iiint_S (3z^2 + z) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi} (3\rho^2 \cos^2\phi + \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\phi\ =$$

$$= 6\pi \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi d\phi\ +\ 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{\phi} \cos\phi\ \sin\phi d\phi = -\frac{128}{5}$$