Compito di Analisi Matematica II del 4 giugno 2013

Corso di Laurea in Fisica a. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.

1) Studiare la funzione:

$$f(x) \,=\, \sqrt{2x^2\,+\,1}\,-\,\sqrt{x^2\,+\,2}$$

Svolgimento

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. $f(x) > 0$ se $\sqrt{2x^2\,+\,1} \,>\, \sqrt{x^2\,+\,2}$ ossia $x^2 - 1 > 0$ e quidi per $x < -1$ o $x > 1$. Di conseguenza $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$ e $f(x) = 0$ per $x = \pm 1$. Inoltre $f(0) = 1 - \sqrt{2}$. Possiamo anche osservare che si tratta di una funzione pari perché $f(x) = f(-x)$. Quindi basta studiarla per $x \geq 0$.
Esaminiamo il suo comportamento agli estremi del suo campo di esistenza.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{2x^2\,+\,1}\,-\,\sqrt{x^2\,+\,2})(\sqrt{2x^2\,+\,1}\,+\,\sqrt{x^2\,+\,2})}{\sqrt{2x^2\,+\,1}\,+\,\sqrt{x^2\,+\,2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2\,+\,1}\,+\,\sqrt{x^2\,+\,2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{2\,+\,\frac{1}{x^2}}\,+\,\sqrt{1\,+\,\frac{2}{x^2}}\right)} = +\infty.$$

Verifichiamo se esiste un asintoto obliquo per x che tende all'infinito del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x\left(\sqrt{2}\sqrt{1\,+\,\frac{1}{2x^2}}\,-\,\sqrt{1\,+\,\frac{2}{x^2}}\right)}{x} = \sqrt{2}-1.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (\sqrt{2}-1)x = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2}\sqrt{1\,\frac{1}{+}2x^2}\,-\,x\sqrt{1\,+\,\frac{2}{x^2}} - (\sqrt{2}-1)x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2}x\left[1+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - x\left[1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - (\sqrt{2}-1)x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{x}\,+\,o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,+\,o\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La retta $y = (\sqrt{2}-1)x$ è asintoto quando x tende a $+\infty$. Per la proprietà simmetria osservata sopra la retta $y = -(\sqrt{2}-1)x$ è asintoto per x che tende a $-\infty$.
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2+2}\,-\,x\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}\,\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\,-\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Da questa espressione deduciamo che $f'(x) = 0$ per $x = 0$ oppure per le soluzioni dell'equazione

$$2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2x^2+1} = 0 \iff 2x^2 + 7 = 0$$

che non ha soluzioni reali. Osserviamo che $f'(x) > 0$ per $x > 0$ se $2\sqrt{x^2+2} > \sqrt{2x^2+1}$, ovvero se $2x^2 + 7 > 0$. Quindi per ogni $x > 0$ risulta $f'(x) > 0$, ossia la funzione cresce sulla semiretta $(0, +\infty)$. Per la sua proprietà di simmetria si avrà che $f'(x) < 0$ per $x < 0$ e quindi f decresce su $(-\infty, 0)$. Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto.
Determiniamo gli intervalli di convessità e concavità della funzione studiando il segno della sua derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}} - \frac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}.$$

Da cui

$$f''(x) > 0 \iff \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}} > \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{(2x^2+1)^3} > \frac{1}{(x^2+2)^3} \iff (x^2+2)^3 > (2x^2+1)^3 \iff$$

$$\iff (x^2+2)^3 - (2x^2+1)^3 > 0.$$

Utilizziamo la scomposizione: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ con $a = x^2 + 2$, $b = 2x^2 + 1$, scrivendo:

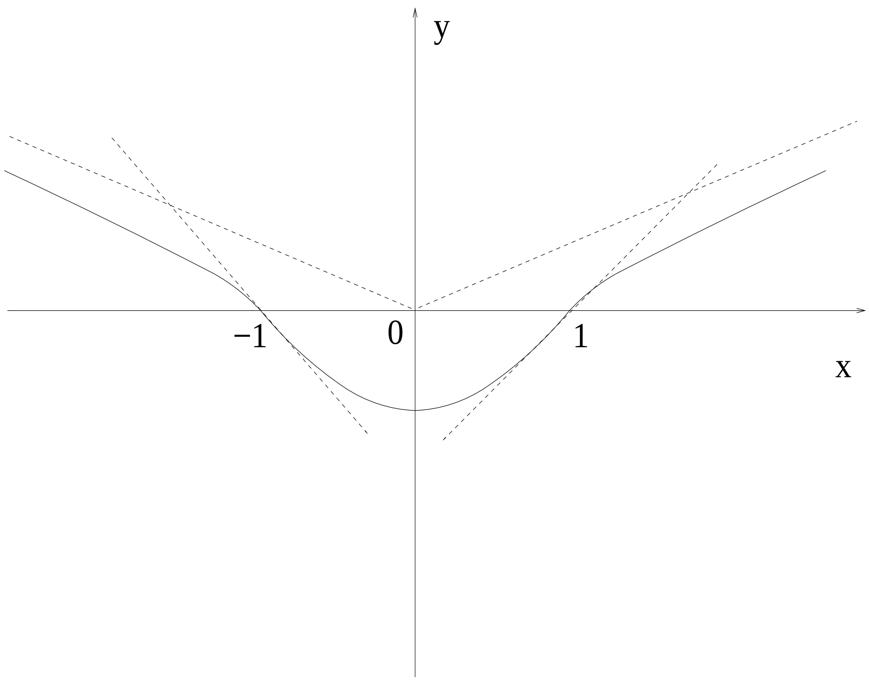
$$(x^2+2)^3 - (2x^2+1)^3 =$$

$$= [(x^2+2) - (2x^2+1)] \left\{(x^2+2)^2 + (x^2+2)(2x^2+1) + (2x^2+1)^2\right\}$$

Il fattore racchiusa dalle parentesi graffe è sempre positivo, quindi il segno della derivata seconda è deciso dal primo fattore, ossia

$$(x^2+2) - (2x^2+1) > 0 \iff -x^2 + 1 > 0 \iff x^2 < 1 \iff |x| < 1.$$

La derivata seconda risulta quindi positiva sull'intervallo $(-1, 1)$ e negativa all'esterno di esso. La funzione sarà convessa in $(-1, 1)$ concava fuori. I punti $x = \pm 1$ sono punti di flesso. Le tangenti nei punti di flesso sono $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$, in $(1, 0)$ e $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$ in $(-1, 0)$.
In base quanto visto possiamo tracciare il seguente grafico.



2) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \;\; \log(3 \,+\, 9\,\cos^2 x)\;\, dx$$

Svolgimento.

Effettuiamo il cambiamento di variabile $t \,=\, \cos x$, per cui $dt \,=\, -\sin x \; dx$, inoltre per $x = 0$, $t = 1$ e per $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 0$. Quindi, sostituendo e integrando per parti:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \;\; \log(3 \,+\, 9\,\cos^2 x)\;\, dx \;=\; -\int_1^0 \log(3+9t^2)\, dt \;=\; \int_0^1 \log(3+9t^2)\, dt \;=$$

$$=\; \big[t\;\log(3+9t^2)\big]_0^1 \;-\; \int_0^1 t\,\frac{18t}{3+9t^2}\;\, dt \;=$$

$$\log 12 \;-\; 2\int_0^1 \frac{3t^2}{1+3t^2}\;\, dt \;= \log 12 \;-\; 2\int_0^1 \frac{1+3t^2-1}{1+3t^2}\, dt \;=$$

$$=\; \log 12 \;-\; 2\int_0^1 1\;dt \;+\; \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}t)^2}\;\, dt \;=$$

$$=\; \log 12 \;-\; 2 \;+\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,[\arctan(\sqrt{3}t)]_0^1 \;=\; \log 12 \;-\; 2 \;+\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{3}.$$

3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \,-\, 3^n}{3^n \,-\, 2^n}\, n\, x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento

La serie data è una serie di potenze con centro in $x = 0$. Calcoliamo il suo raggio di convergenza mediante la formula $r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{4^n}{3^n} \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-(\frac{2}{3})^n}}} = \frac{3}{4}.$$

La serie converge puntualmente per $|x| < \frac{3}{4}$.
Consideriamo il comportamento agli estremi dell'intervallo. Per $x = \frac{3}{4}$ la serie assume la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-(\frac{2}{3})^n}$$

che è una serie divergente in quanto è a termini postivi e il suo termine generale non è infinitesimo (tende a $+\infty$). Per $x = -\frac{3}{4}$ la serie assume la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-(\frac{2}{3})^n}$$

che è una serie indeterminata in quanto è a termini di segno alterno e il suo termine generale non è infinitesimo (tende a $+\infty$ in valore assoluto).
Possiamo concludere affermando che la serie converge puntualmente sull'intervallo $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ mentre converge uniformemente su $[-\delta, \delta]$, con $0 < \delta < \frac{3}{4}$.