Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 7 Giugno 2013

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ \\ a_{n+1} = 8\, a_n^3 + \dfrac{1}{2}\, a_n \end{cases}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = e^x - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 .$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \log(\sqrt{x} + 1) \; dx.$$

Soluzioni degli esercizi proposti.

1) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite se esiste al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\begin{cases} a_1 \;=\; \alpha \\ \\ a_{n+1} \;=\; 8\, a_n^3 \;+\; \dfrac{1}{2}\, a_n \end{cases}$$

Svolgimento

La successione è ben definita per ogni valore di α.
Nell'espressione che definisce la successione non compare esplicitamente n, possiamo quindi associare alla successione la funzione

$$f(x) \;=\; 8\, x^3 \;+\; \frac{1}{2}\, x,$$

quindi la relazione ricorsiva può essere scritta

$$a_{n+1} \;=\; f(a_n).$$

In questo modo lo studio del comportamento della successione è facilitato. Infatti basta tener conto dell'andamento di f.
Studiamo gli intervalli dove f è monotona considerando la sua derivata prima.

$$f'(x) \;=\; 24\, x^2 \;+\; \frac{1}{2}.$$

Questa risulta positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è monotona crescente. Ritornando alla successione studiamo la sua monotonia per induzione.
Primo passo:

$$a_1 > a_2 \iff \alpha \;>\; 8\,\alpha^3 \;+\; \frac{1}{2}\,\alpha \iff \frac{1}{2}\,\alpha \;>\; 8\,\alpha^3 \iff 0 < \alpha < \frac{1}{4}.$$

Dimostriamo che la successione è decrescente per $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ verificando l'induttività della proposizione, ossia

$$a_n > a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+1} > a_{n+2}.$$

Questo segue dalla monotonia di f, infatti

$$a_n > a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) > f(a_{n+2}) = a_{n+1}.$$

Possiamo concludere che la succesione è monotona decrescente per $0 < \alpha < \frac{1}{4}$. Nello stesso modo si ragiona per dimostrare che per $\alpha > \frac{1}{4}$ è crescente. Infatti

$$a_1 < a_2 \iff \alpha \;<\; 8\,\alpha^3 \;+\; \frac{1}{2}\,\alpha \iff \frac{1}{2}\,\alpha \;<\; 8\,\alpha^3 \iff \alpha > \frac{1}{4}.$$

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_{n+2}) = a_{n+1}.$$

La successione risulta in ogni caso monotona, ammette dunque limite. Se il limite L è reale dovrà risolvere l'equazione

$$8L^3 + \frac{1}{2}L = L.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $L_1 = 0$, $L_2 = \frac{1}{4}$, $L_3 = -\frac{1}{4}$. Nel caso che $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, dato che la successione è monotona decrescente e positiva ([1]) , il limite è $L_1 = 0$, perché L_2 e L_3 non sono punti di accumulazione per la successione.
Se invece $\alpha > \frac{1}{4}$, essendo la successione crescente L_2 non può essere punto di accumulazione e quindi il limite è $+\infty$.
Riassumendo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{se } \alpha = \frac{1}{4}, \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = e^x - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

la funzione non presenta asintoti del tipo $y = mx + q$ perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$

Studiamo la monotonia determinando gli intervalli dove la derivata prima è positiva o negativa.

[1]Infatti, per induzione: $a_1 = \alpha > 0$, se $a_n > 0$ allora $a_{n+1} = 8a_n^3 + \frac{1}{2}a_n > 0$

$$f'(x) = e^x - 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Il segno di f' non è di evidenza immediata. Per determinarlo utilizziamo le derivate successive.

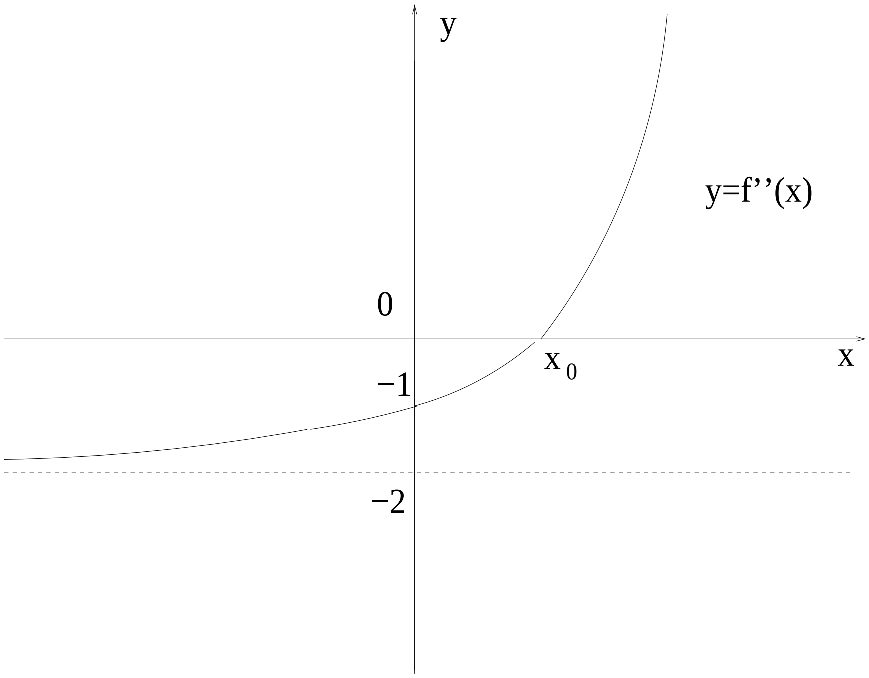
$$f''(x) = e^x - 2, \qquad f^{III}(x) = e^x, \qquad f^{IV}(x) = e^x.$$

La funzione $y = f''(x)$ è strettamente crescente e convessa dato che la sua derivata prima, ossia $f^{III}(x)$ è positiva, come pure la sua derivata seconda $f^{IV}(x)$. Di conseguenza, essendo $f''(0) = -1$ e

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - 2 = +\infty,$$

possiamo dedurre che esiste $x_0 > 0$ tale che

$$f''(x_0) = 0, \;\; f''(x) > 0 \text{ per } x > x_0, \;\; f''(x) < 0 \text{ per } x < x_0.$$



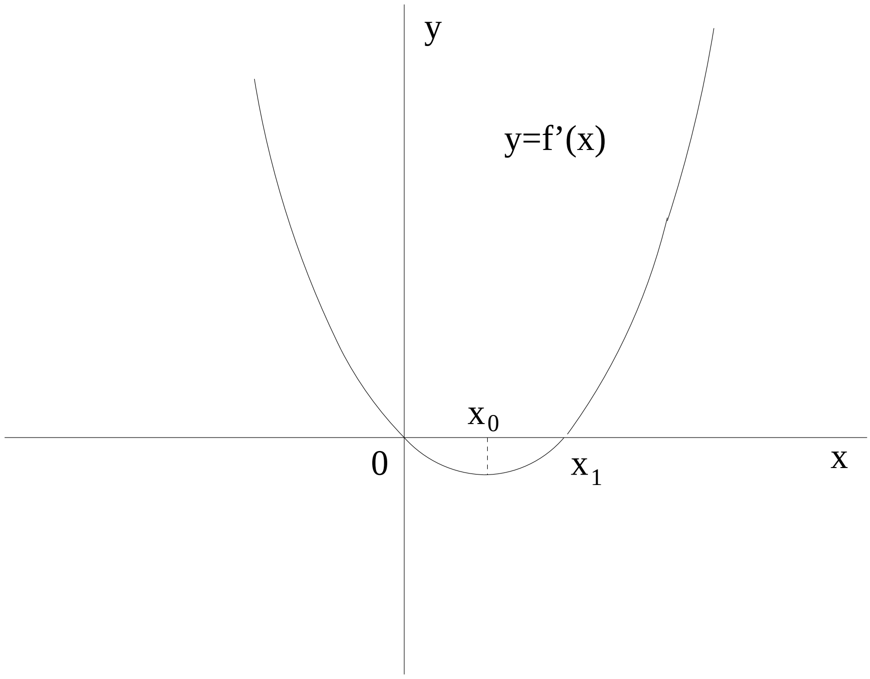
Queste osservazioni portano a due conclusioni. La prima è che f è concava per $x < x_0$ e convessa per $x > x_0$, quindi x_0 è punto di flesso per f. La seconda è che, essendo f'' la derivata di f', dalle considerazioni fatte possiamo dedurre il comportamento di f'. Ossia f' è monotona decrescente per $x < x_0$, crescente per $x > x_0$. Il punto x_0 è punto di minimo per f'.

Dobbiamo stabilire il segno di $f'(x_0)$. Per fare questo basta osservare che $f'(0) = 0$. per cui essendo x_0 punto di minimo deve essere necessariamente $f'(x_0) < 0$. D'altra parte

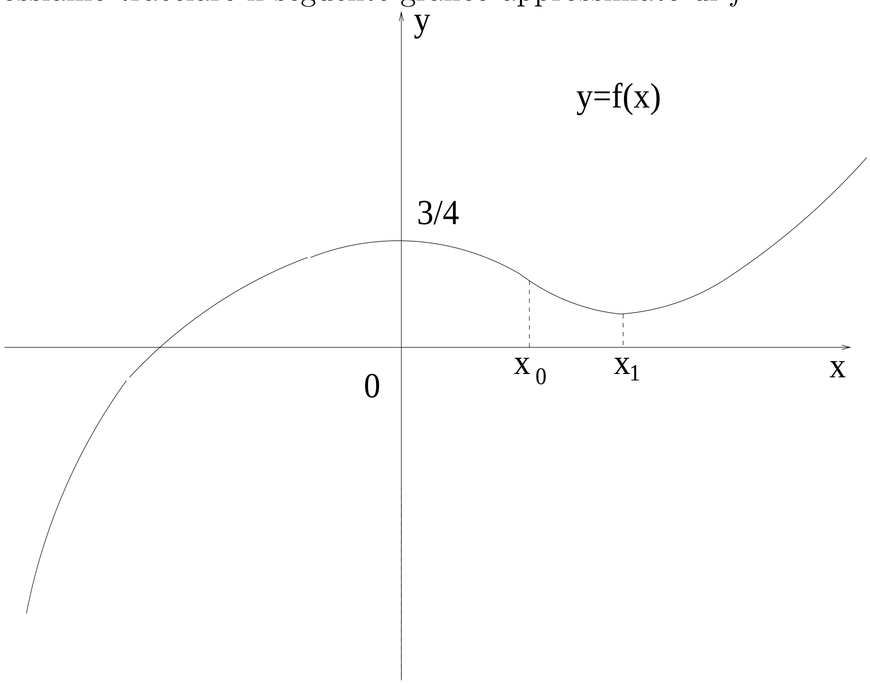
$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = +\infty$$

Quindi, per il teorema degli zeri esiste anche un punto $x_1 > x_0$ dove $f'(x_1) = 0$. Quanto osservato ci consente di affermare che $f'(x) > 0$ per $x < 0$ oppure per $x > x_1$ e $f'(x) < 0$ per

$0 < x < x_1$. Di conseguenza risulta che f è crescente per $x < 0$ oppure $x > x_1$ e decrescente per $o < x < x_1$.



In definitiva possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f



(3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \ \log(\sqrt{x} + 1) \ \ dx.$$

Svolgimento

Possiamo effettuare il seguente cambiamento di variabile:

$$t = \sqrt{t}, \text{ quindi } dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Per $x = 0$, $t = 0$, mentre per $x = 1$, $t = 3$. Sostituendo sopra e integrando per parti, otteniamo

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \ \log(\sqrt{x} + 1) \ \ dx \ = \ 2\int_0^3 \log(t+1) \ dt \ = \ 2 \left[t \ \log(t+1)\right]_0^3 \ - \ \int_0^3 \frac{2t}{1+t} \ dt \ =$$

$$= \ 18 \log 10 \ - \ 2\int_0^3 \frac{t+1-1}{1+t} \ dt = 6 \log 4 \ - \ 2\int_0^3 1 \ \ dt \ + \ 2\int_0^3 \frac{1}{1+t} \ dt \ =$$

$$= 6 \ \log 4 \ - \ 2 \left[t\right]_0^3 \ - \ 2 \left[\log(1+t)\right]_0^3 \ = \ 16 \log 2 \ - \ 6.$$

Si osservi che la funzione non è definita in $x = 0$, ma è ugualmente integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[0, 9]$ perchè

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \ \log(\sqrt{x} + 1) = 1,$$

e quindi può essere prolungata per continuità.
Un'altro modo di risolvere l'integrale può essere quello di effettuare il cambiamento di variabile seguente:

$$t = \sqrt{x} + 1$$