Compito di Analisi Matematica I+II del 8 gennaio 2014

Corso di Laurea in Fisica a. a. 2012/13

Risoluzione degli esercizi proposti.
1) Studiare la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+3}{5-a_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

e calcolarne il limite.

Svolgimento

La successione è ben definita in quanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < 3$. Infatti, procedendo per induzione, $a_1 < 3$. Inoltre se $a_n < 3$ allora $a_{n+1} < 3$. Infatti essendo $5 - a_n > 0$, risulta

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{5 - a_n} < 3 \iff a_n + 3 < 15 - 3a_n \iff a_n < 3,$$

che è vera per l'ipotesi induttiva.
Studiamo la monotonia osservando che $a_1 = \frac{5}{3} < a_0 = 2$, $a_2 = \frac{7}{5} < a_1 = \frac{5}{3}$. Dimostriamo quindi che la successione è monotona decrescente per induzione. Il primo passo segue dall'osservazione fatta sopra, mentre l'induttività dalle seguenti considerazioni:

$$a_{n+2} < a_{n+1} \iff \frac{a_{n+1} + 3}{5 - a_{n+1}} < \frac{a_n + 3}{5 - a_n}$$

$$\iff 5a_{n+1} + 15 - 3a_n - a_n a_{n+1} < 5a_n + 15 - 3a_{n+1} - a_n a_{n+1} \iff a_{n+1} < a_n.$$

Essendo la successione monotona con i termini tutti positivi essa è limitata inferiormente, di conseguenza, per il teorema di regolarità delle successioni monotone, ammette limite reale L che possiamo calcolare dalla relazione ricorsiva ricavando l'equazione:

$$L = \frac{L + 3}{5 - L} \iff L^2 - 4L + 3 = 0$$

Le radici sono $L_1 = 3$, $L_2 = 1$. L_1 si scarta perché non è punto di accumulazione per la successione (in quanto è decrescente). In definitiva il limite cercato è $L_2 = 1$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = x + \log(x^2 + 8x + 16)$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

Il campo di esistenza della funzione è dato dai valori di x che rendono maggiore di zero l'argomento del logaritmo. Osserviamo che trattandosi di un quadrato perfetto $x^2+8x+16 = (x+4)^2$ possiamo scrivere

$$C.E. = \{x \in R : \ \ x \neq -4\}\,.$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) \ = \ -\infty; \ \ \lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \ = = +\infty; \ \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Valutiamo l'esistenza di asintoti del tipo $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to -4\pm} f(x) - mx = \lim_{x\to -4\pm} x + \log(x^2 + 8x + 16) - x = +\infty.$$

La funzione non ammette asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia della funzione. Scrivendo la funzione

$$f(x) = x \ + \ 2 \ \log|x+4|$$

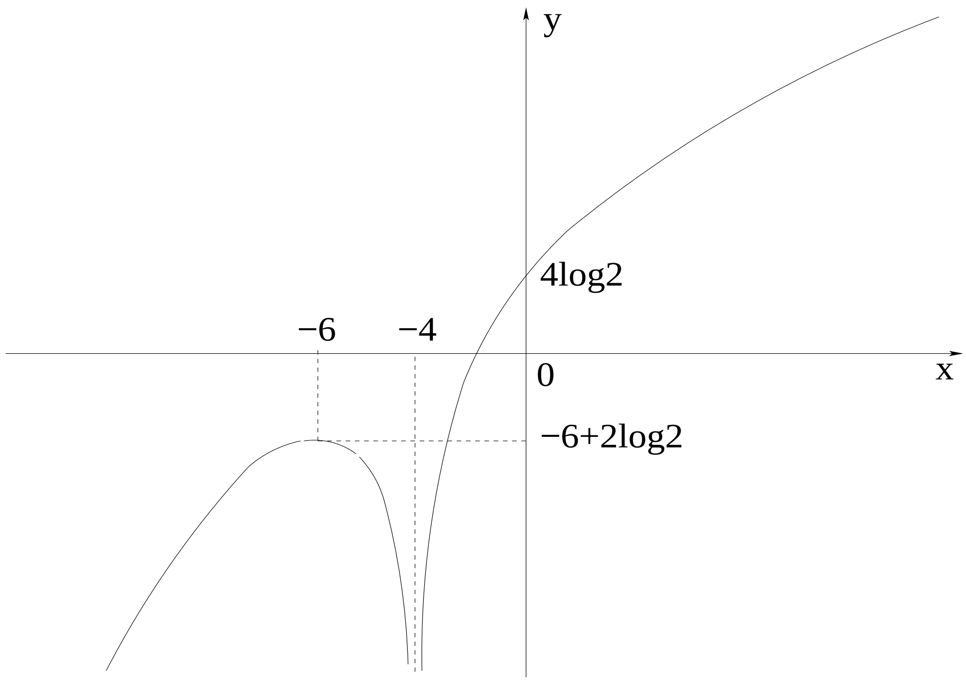
possiamo ottenere

$$f'(x) \ = \ 1 \ +2\,\frac{1}{x+4} \ = \ \frac{x+6}{x+4},$$

da cui $f'(x) > 0$ se $x+6 > 0$ e $x+4 > 0$ oppure $x+6 < 0$ e $x+4 < 0$, quindi $x < -6$ oppure $x > -4$. Mentre $f'(x) < 0$ se $-6 < x < -4$. La funzione risulta monotona crescente sugli intervalli $x < -6$ oppure $x > -4$ e decrescente su $-6 < x < -4$. Il punto $x = -6$ è di massimo relativo.
Calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavità e convessità di f.

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+4)^2},$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ per ogni valore di x appartenente al C. E. di f. Quindi la funzione è concava su tutto il suo campo di esistenza. Osservato che $f(-6) = -6 \ + \ 2\,\log 2 < 0$ e $f(0) = 4\log 2$, siamo in grado di tracciare il seguente grafico.



Calcolare il valore del seguente integrale:

$$\int_0^1 \left[\frac{\log(6x+1)}{2x+3} + 3\,\frac{\log(2x+3)}{6x+1}\right]\,dx.$$

Svolgimento

$$\int_0^1 \left[\frac{\log(6x+1)}{2x+3} + 3\,\frac{\log(2x+3)}{6x+1}\right]\,dx = \int_0^1 \frac{\log(6x+1)}{2x+3}\,dx + 3\int_0^1 \frac{\log(2x+3)}{6x+1}\,dx.$$

Calcoliamo il valore del primo integrale procedendo mediante integrazione per parti.

$$\int_0^1 \frac{\log(6x+1)}{2x+3} = \left[\frac{1}{2}\log(6x+1)\,\log(2x+3)\right]_0^1 - 3\int_0^1 \frac{\log(2x+3)}{6x+1}\,dx =$$

$$= \frac{\log 7\,\log 5}{2} - 3\int_0^1 \frac{\log(2x+3)}{6x+1}\,dx.$$

Tenuto conto di questo possiamo scrivere:

$$\int_0^1 \frac{\log(6x+1)}{2x+3} + 3\int_0^1 \frac{\log(2x+3)}{6x+1}\,dx = \\ = \frac{\log 7\,\log 5}{2}.$$

4) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right)x^n.$$

Svolgimento.
Utilizziamo il criterio della convergenza assoluta e della radice ennesima.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\ |x|^n} = |x|.$$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\ |x|^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)}\,|x|\ = |x|,$$

perché

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1<\frac{1}{n^2}$$

essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$$

Il raggio di convergenza della serie di potenze è quindi 1.
Esaminiamo il comportamento agli estremi dell'intervallo.
Per $x = 1$ si considera la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right). \tag{1}$$

Questa diverge perchè, applicando il criterio della convergenza asintotica, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1+\tfrac{1}{2n^2}+o(\tfrac{1}{n^2})-1\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Quindi la serie (1) si comporta come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

che diverge.
Nel punto $x = -1$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right). \tag{2}$$

questa converge per il criterio di Leibniz in quanto il termine generale tende a zero per quanto visto sopra ed inoltre la successione

$$a_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) .$$

è decrescente. Infatti consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

Questa è monotona crescente in quanto la sua derivata è positiva

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} > 0.$$

Da questo

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{1}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

per il teorema di Abel la serie converge uniformemente (e quindi puntualmente) su ogni intervallo del tipo $[-1, \delta]$ con $-1 < \delta < 1$. Diverge per $x \leq 1$. È indeterminata per $x < -1$.