Analisi Matematica (Corso D)
CdL in Informatica

Prova scritta del 17/7/2003

(1) Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(1+x^2) \; - \; x \sin x}{e^{-\frac{x^2}{2}} \; - \; \cos x}$$

(2) Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2},$$

determinare: gli intervalli dove è crescente e dove è decrescente, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo, eventuali asintoti, gli intervalli dove è concava o convessa. Tracciarne un grafico approssimato.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan \sqrt{x-3} \;\; dx.$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n^3+n+1}.$$

Risoluzione degli esercizi proposti
(1) Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(1+x^2\right) \;-\; x\,\sin x}{e^{-\frac{x^2}{2}} \;-\; \cos x}$$

Svolgimento.
Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite.

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

posto $t = x^2$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Sostituendo questi sviluppi nell'espressione del limite proposto:

$$\lim_{x\to 0+}, \; \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{5}{24}x^4 + o(x^4)} =$$

(Principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^4}{\frac{5}{24}x^4} = -\frac{8}{5}.$$

(2) Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2},$$

determinare: gli intervalli dove è crescente e dove è decrescente, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo, eventuali asintoti, gli intervalli dove è concava o convessa. Tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

Il dominio della funzione è dato dall'intero insieme dei reali (l'indice di radice è dispari.) Determiniamo il comportamento agli estremi del dominio calcolando i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} =$$

(è una forma ideterminata del tipo $-\infty + \infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{(x-2)^2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} + 1\right) = +\infty.$$

Vediamo se la funzione ammette degli asintoti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^2} = 0$$

La funzione non ammette asintoto per $x \to +\infty$. Allo stesso modo per $x \to -\infty$ otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

La funzione non ammette asintoto per $x \to -\infty$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Determiniamo i valori di x per cui $f'(x) > 0$, risolvendo:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} > -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)}},$$

da cui $1 > -2\sqrt[3]{x-2}$, e quindi $x > \frac{15}{8}$. Mentre $f'(x) < 0$ per $x < \frac{15}{8}$. Nel punto $x = \frac{15}{8}$ la derivata prima si annulla. Da questi fatti deduciamo che: f

è crescente per $x > \frac{15}{8}$, f è decrescente per $x < \frac{15}{8}$. Dunque nel punto $x = \frac{15}{8}$ la funzione ha un minimo relativo. Calcoliamo la derivata seconda.

$$D^2 f(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} - \frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}.$$

Determiniamo i valori di x per cui $D^2 f(x) > 0$ risolvendo:

$$-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} - \frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} > 0,$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} < -\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} < -1,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)}} < -1.$$

Le soluzioni di questa disequazione si ottengono dai sistemi:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ 1 < -\sqrt[3]{x-2} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ 1 > -\sqrt[3]{x-2} \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo ha come soluzioni $1 < x < 2$. Concludendo la derivata seconda è positiva per $1 < x < 2$, mentre è negativa per valori esterni all'intervallo. Di conseguenza f è convessa nell'intervallo $(1, 2)$, ed concava sulle semirette $(-\infty, 1)$,$(2, +\infty)$.

Il grafico approssimato della funzione è il seguente.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\sqrt{x-3}\ dx.$$

Svolgimento.
Risolviamo applicando la formula di integrazione per parti:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\ -\int f(x)g'(x)dx,$$

prendendo:$g(x) = \arctan\sqrt{x-3}$, $f'(x) = 1$, quindi $f(x) = x$. Otteniamo:

$$\int \arctan\sqrt{x-3}\ dx = x\ \arctan\sqrt{x-3} - \int \frac{x}{1+\left(\sqrt{x-3}\right)^2}\ \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\ dx\ =$$

$$= x\ \arctan\sqrt{x-3}\ -\int \frac{x}{(x-2)2\sqrt{x-3}}\ dx.$$

Nell'ultimo integrale effetuiamo il seguente cambiamento di variabile: $t = \sqrt{x-3}$ e quindi: $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-3}}$, $x = t^2+3$. Sostituendo:

$$\int \frac{x}{(x-2)2\sqrt{x-3}}\ dx\ = \int \frac{t^2+3}{1+t^2}\ dt\ = \int \left(1\ +\ \frac{2}{1+t^2}\right)\ dt\ =$$

$$= \int 1\, dt + 2 \int \frac{1}{1+t^2}\, dt \; = \; t \; + \; 2 \; \arctan t \; + C =$$

(tenuto conto di quanto posto sopra)

$$= \sqrt{x-3} \; + \; 2 \arctan \sqrt{x-3} \; + \; C$$

In definitiva l'insieme delle primitive dell'integrale di partenza è:

$$\{(x-2) \arctan \sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che l'integrale proposto può essere anche risolto effettuando subito il cambiamento di variabile $t = \sqrt{x-3}$ nel modo che segue:

$$\int \arctan \sqrt{x-3}\, dt \; = \int \frac{2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}} \; \arctan \sqrt{x-3} \;\; dt \; = \int 2t \; \arctan t\, dt.$$

Effettuiamo un'integrazione per parti prendendo $g(t) = \arctan t$ e $f'(t) = 2t$ quindi $f(t) = t^2$.

$$\int 2t \; \arctan t\, dt = t^2 \; \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} \; dt = t^2 \; \arctan t - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \; dt =$$

$$= t^2 \; \arctan t - \int 1\, dt + \int \frac{1}{1+t^2} \; dt \; = \; t^2 \; \arctan t \; - t + \arctan t + C = \left(t^2+1\right) \; \arctan t - t + C =$$

(tenuto conto della posizione sopra)

$$= (x-2) \; \arctan \sqrt[3]{x-3} - \sqrt[3]{x-3} + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \; \frac{\sqrt{n^2+2}}{n^3+n+1}.$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi, possiamo quindi applicare uno dei criteri di convergenza dimostrati per questo tipo di serie, ad esempio il criterio del confronto. Maggioriamo il termine generale della serie data con il termine generale di una serie della quale conosciamo il comportamento. Cerchiamo, nel caso considerato, di maggiorare con il termine generale di una serie armonica.

$$\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^3+n+1} \leq 2\frac{\sqrt{n^2}}{n^3} = 2\frac{1}{n^2}, \quad \forall n > 1.$$

Ricordiamo che la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

è convergente. In conclusione, per il criterio del confronto, anche la serie data risulta convergente.

Un altro modo semplice di studiare il comportamento della serie, in questo caso, è il criterio del limite. Osserviamo che l'ordine di infinito del numeratore è uno, mentre l'ordine di infinito del denominatore è tre, il termine generale della serie può essere confrontato con $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \; n\frac{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = 1$$

Anche per questa via, che come si può osservare ha dei tratti in comune con la precedente, si conclude (mediante il criterio del limite) che la serie data risulta convergente, avendo il termine generale lo stesso comportamento della serioe armonica convergente : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.