Analisi Matematica (Corso D)
CdL in Informatica

Prova scritta del 24/6/2003

(1) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^\alpha} = L.$$

(2) Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 2x - 8|},$$

determinare: gli intervalli dove è crescente e dove è decrescente, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo, eventuali asintoti, gli intervalli dove è concava o convessa. Tracciarne un grafico approssimato.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\, dx.$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n.$$

Risoluzione degli esercizi proposti

(1) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^\alpha} = L$$

Svolgimento.

Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione del limite proposto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Eseguiamo il prodotto tra le due funzioni:

$$e^x \sin x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] =$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + xo(x^2) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{6}o(x^2) + o(x^3) + xo(x^3) + \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^2)o(x^3)$$

I termini:

$$xo(x^2); -\frac{x^4}{6}; \frac{x^5}{12}; \frac{x^3}{6}o(x^2); xo(x^3); \frac{x^2}{2}o(x^3); o(x^2)o(x^3),$$

sono tutti $o(x^3)$, la loro somma é ancora un $o(x^3)$. In definitiva otteniamo:

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Sostituendo questa espressione nel limite assegnato:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - x^2}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{3-\alpha}}{3} = \frac{1}{3}$$

Per $\alpha = 3$. Infatti se $\alpha < 3$ il limite è zero, mentre se $\alpha > 3$ il limite è $+\infty$.

(2) Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 2x - 8|},$$

determinare: gli intervalli dove è crescente e dove è decrescente, gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo, eventuali asintoti, gli intervalli dove è concava o convessa. Tracciarne un grafico approssimato.

Svolgimento.

Il dominio di f è dato dall'intero insieme $\mathbb{R}$. Vediamo se la funzione ammette un asintoto $\varphi_1(x) = m_1 x + q_1$ per x che tende a $+\infty$.

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}}{x} = 1$$

$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-8} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-8} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-8-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-8} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}+1\right)} = 1$$

L'asintoto per x che tende a $+\infty$ è:

$$\varphi_1(x) = x + 1.$$

Vediamo ora se f ammette un asintoto $\varphi_2 = m_2 x + q_2$ per x che tende a $-\infty$.

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x} = = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}}{x} = -1$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-8} + x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8} + x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-8} - x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-8-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}+1\right)} = -1$$

Perché $\frac{x}{|x|} = -1$ se $x < 0$.

Dunque, l'asintoto per $x \to -\infty$ è :

$$\varphi_2(x) = -x - 1$$

Si osservi che in entrambi i casi, nel calcolo dei limiti, l'espressione considerata sotto radice è stata : $x^2 + 2x - 8$. Infatti dovendosi calcolare limiti per $x \to \pm\infty$ consideriamo i valori di x grandi (in valore assoluto), quindi esterni all'intervallo $(-4, 2)$.

Calcoliamo la derivata prima per individuare gli intervalli di monotonia e gli eventuali massimi o minimi relativi della funzione.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}} & \text{se } x < -4 \text{ o } x > 2 \\ \frac{-x-1}{\sqrt{-(x^2+2x-8)}} & \text{se } -4 < x < 2 \end{cases}$$

Da questa espressione deduciamo quanto segue. Nell'intervallo $(-4, 2)$:

$$f' > 0 \quad \text{se} \quad -4 < x < -1$$

$$f' < 0 \quad \text{se} \quad -1 < x < 2.$$

Sulle semirette $(-\infty, -4)$ e $(2, +\infty)$:

$$f' > 0 \quad \text{se} \quad x > -1 \text{ e } x > 2 \text{ quindi } \quad x > 2$$

$$f' < 0 \quad \text{se} \quad x < -1 \text{ e } x < -4 \text{ quindi } \ x < -4.$$

Ne segue che: f è monotona crescente sugli intervalli $(-4, -1)$,$(2, +\infty)$, f è monotona decrescente sugli intervalli $(-\infty, -4)$,$(-1, 2)$.

Per quanto riguarda i massimi e i minimi relativi, osserviamo che l'unico zero della derivata prima si ha per $x = -1$. questo risulta essere un punto di massimo relativo in quanto per $x < -1$ f è crescente , mentre per $x > -1$ f è decrescente. Osserviamo inoltre che la funzione non è derivabile nei punti $x = -4$ e $x = 2$ (il limite di f' non esiste), in essi f risulta però continua. Poiché f risulta crescente per $x > -4$, decrescente per $x < -4$ ed analogamente, crescentre per $x > 2$, decrescente per $x < 2$ possiamo dedurre che in $x = -4$ e $x = 2$ f ammette dei minimi relativi.

Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli dove f è concava o convessa

$$D^2 f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+2x-8} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x-8}}}{x^2+2x-8} & \text{se } x < -4 \text{ o } x > 2 \\ -\frac{\sqrt{-(x^2+2x-8)} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{-(x^2+2x-8)}}}{-(x^2+2x-8)} & \text{se } -4 < x < 2 \end{cases}$$

Quindi

$$D^2 f(x) = \begin{cases} \frac{-9}{(x^2+2x-8)\sqrt{x^2+2x-8}} & \text{se } x < -4 \text{ o } x > 2 \\ -\frac{9}{-(x^2+2x-8)\sqrt{-(x^2+2x-8)}} & \text{se } -4 < x < 2 \end{cases}$$

Da questa espressione deduciamo che :

$$\begin{array}{lll} D^2 fx) < 0 & \text{se} & x > 2 \quad \text{oppure} \quad x < -4 \\ D^2 f(x) < 0 & \text{se} & -4 < x < 2. \end{array}$$

Da cui segue che f è concava sulle semirette $(-\infty, -4)$,$(2, +\infty)$ e sull'intervallo $(-4, 2)$. Tenendo conto di quanto abbiamo trovato, possiamo tracciare il seguente grafico.

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6} \, dx.$$

Svolgimento
Effettuiamo un cambiamento di variabile ponendo:

$$t = e^x$$

da cui

$$dt = e^x \, dx.$$

L'integrale proposto si trasforma nel seguente:

$$\int \frac{1}{t^2 - 5t + 6} \, dt$$

che è l'integrale di una funzione razionale. Applichiamo il metodo di risoluzione degli integrali di funzioni razionali calcolando prima le radici del denominatore della frazione (che risultano essere $t_1 = 2, t_2 = 3$) e quindi determinando $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3}$$

Questa eguaglianza è valida per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ se:

$$1 = (A + B)t - 3A - 2B$$

Da cui otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ -3A - 2B & = 1 \end{cases}$$

Questo sistema ha come soluzione:$A = -1, B = 1$. Sostiuiamo quanto trovato nell'integrale sopra:

$$\int \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\, dt = \int \frac{-1}{t-2}\, dt + \int \frac{1}{t-3}\, dt = -\log|t-2| + \log|t-3| + C =$$

$$= \log\left|\frac{t-3}{t-2}\right| + C \ , C \in \mathbb{R}.$$

Tenuto conto delle posizione iniziale, l'insieme delle primitive dell'integrale proposto è dato dall'espressione:

$$\log\left|\frac{e^x - 3}{e^x - 2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(4) Dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n.$$

Svolgimento.

La serie proposta è a termini di segno positivo. Infatti risulta per ogni $n > 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n} > 0$$

che equivale alla diseguaglianza:

$$\frac{(-1)^n}{n} > -\frac{1}{2}$$

questa è verificata per ogni n pari. Se invece n è dispari, diventa:

$$-\frac{1}{n} > -\frac{1}{2}$$

che è verificata per ogni $n > 2$.

Possiamo applicare uno dei criteri per le serie a termini positivi. In questo caso risulta semplice l'applicazione del criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

(perchè $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$)

In conclusione essendo il limite minore di uno, il criterio della radice ennesima assicura la convergenza della serie.