Prova scritta del 6/2/2003

Soluzione degli esercizi N.1

Fila n.1 Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\cos x \,-\, \sin x}{\log(1+2x^2) \,-\, 2\log(1+x^2)}.$$

Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite proposto:
$\cos x \,=\, 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
quindi:
$x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Considerando invece: $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, per $t = 2x^2$ si ottiene:
$\log(1+2x^2) = 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$
mentre per $t = x^2$ si ha:
$2\log(1+x^2) = 2x^2 - x^4 + o(x^4)$.

Sostituiamo nel limite questi sviluppi:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{2x^2 - 2x^4 + o(x^4) - 2x^2 + x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-x^4 + o(x^4)} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{-x^4} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Fila n.2 Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2\sin 3x \,-\, 3\sin 2x}{5\log(1+2x) \,-\, 2\log(1+5x)}.$$

Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite proposto:
$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$,
sostituendo $t = 3x$, otteniamo: $\sin 3x = 3x - \frac{9x^3}{2} + o(x^3)$
mentre per $t = 2x$ si ha :
$\sin 2x = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$,

Considerando invece: $\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, per $t = 2x$ si ottiene:
$\log(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + o(x^4)$
mentre per $t = 5x$ si ha:
$\log(1 + 5x) = 5x - \frac{25x^2}{2} + o(x^2)$.

Sostituiamo nel limite questi sviluppi:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{6x - 9x^3 + o(x^3) - 6x + 4x^3 + o(x^3)}{10x - 10x^2 + o(x^2) - 10x + 25x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-5x^3 + o(x^3)}{15x^2 + o(x^2)} =$$

(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-5x^3}{15x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x}{3} = 0.$$

Fila n.3 Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2} - e^{3x^2} + 2x^2}{\sin 5x^2 \; - \; 5 \sin x^2}.$$

Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite proposto:
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,
sostituendo $t = x^2$:
$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$,
mentre per $t = 3x^2$ si ottiene: $e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{9x^4}{2} + o(x^4)$.

Consideriamo:
$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$.
sostituiamo $t = 5x^2$:
$\sin 5x^2 = 5x^2 - \frac{125x^6}{6} + o(x^6)$,
per $t = x^2$ si ha:
$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$.

Sostituiamo nel limite questi sviluppi:

$$\lim_{x\to o+} \frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1-3x^2-\frac{9x^4}{2}+o(x^4)+2x^2}{5x^2-\frac{125x^6}{6}+o(x^6)-5x^2+\frac{5x^6}{6}+o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-4x^4+o(x^4)}{-20x^6+o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{5x^2} = +\infty.$$

Fila n.4 Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\sin x^2 \, - \, \sin 3x^2}{e^{x^3}-e^{2x^3}+x^3}.$$

Utilizziamo i polinomi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nel limite proposto:
$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$,
sostituendo $t = x^3$:
$e^{x^3} = 1+x^3+\frac{x^6}{2}+o(x^4)$,
mentre per $t = 2x^3$ si ottiene: $e^{2x^3} = 1+2x^3+\frac{4x^6}{2}+o(x^4)$.

Consideriamo:
$\sin t = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$.
sostituiamo $t = x^2$:
$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)$,
per $t = 3x^2$ si ha:
$\sin 3x^2 = 3x^2-\frac{27x^6}{6}+o(x^6)$.

Sostituendo nel limite proposto:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2-\frac{x^6}{2}+o(x^6)-3x^2+\frac{9x^6}{2}+o(x^6)}{1+x^3+\frac{x^6}{2}+o(x^6)-1-2x^3-2x^6+o(x^6)+x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{4x^6+o(x^6)}{-\frac{3}{2}x^6+o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{4x^6}{-\frac{3}{2}x^6} = -\frac{8}{3}.$$