Svolgimento degli esercizi N.3

Prova scritta del 9/1/2003

Fila 1 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \log\left(1+\sqrt{x}\right)\ dx.$$

Risolviamo l'integrale mediante il cambiamento di variabile:
$t=\sqrt{x}$, quindi $x=t^2$ e $dx=2tdt$. Sostituendo:

$$\int 2t\,\log\left(1+t\right)\ dt$$

Procediamo utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int F'(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx$$

Poniamo $F'(x)=2t$, $G(x)=\log(1+t)$. Di conseguenza $F(x)=t^2$, mentre $G'(x)=\frac{1}{1+t}$.
Sostituendo nella formula:

$$\int 2t\,\log\left(1+t\right)\ dt = t^2\log(1+t) - \int \frac{t^2}{1+t}\,dt. \tag{1}$$

Rimane quindi da calcolare l'ultimo integrale, che riguarda una funzione razionale. Effettuiamo la divisione tra il polinomio al numeratore e quello al denominatore. Otteniamo: $t^2=(t-1)(1+t)+1$. Da questo segue:

$$\int \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int \frac{(t-1)(1+t)+1}{1+t}\,dt = = \int \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

(per la linearità dell'integrale)

$$= \int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt == \frac{1}{2}t^2 - t + \log\mid 1+t\mid + C$$

Sostituiamo il risultato ottenuto in (1):

$$\int 2t\,\log\left(1+t\right)\ dt = t^2\log(1+t) - \frac{1}{2}t^2 + t - \log\mid 1+t\mid + C =$$

Sostituendo al posto di t la posizione di partenza si ha infine:

$$\int \log\left(1+\sqrt{x}\right) dx = x\log\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \log\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

Fila 2 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx.$$

Anche in questo caso effettuiamo il cambiamento di variabile: $x = t^2$, per cui $dx = 2tdt$. Sostituiamo nell'integrale proposto ed applichiamo la formula di integrazione per parti [1]:

$$\int 2t \arctan t\ dt = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \tag{2}$$

Ci siamo ricondotti al calcolo di un integrale di funzione razionale. Scomponiamo il numeratore in modo che il suo grado sia inferiore a quello del denominatore. Ad esempio mediante l'algoritmo della divisione tra polinomi (numeratore diviso denominatore). In questo caso dato che abbiamo a che fare con polinomi molto elementari la scomposizione è piuttosto evidente: $t^2 = 1\cdot(1+t^2) - 1$.

$$\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1(1+t^2)-1}{1+t^2}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

(per la proprietà di linearità dell'integrale)

$$= \int 1\, dt - \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = t - \arctan t + C.$$

Sostituiamo in (2) il risultato così calcolato:

$$\int 2t \arctan t\ dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + C \tag{3}$$

Tenuto conto della sostituzione fatta otteniamo infine:

$$\int \arctan\sqrt{x}\, dx = (x+1)\arctan\sqrt{x}\ -\ \sqrt{x} + C.$$

Fila 3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \log\left(3+\sqrt{x}\right)\ dx.$$

[1] $\int F'(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx$, si pone in questo caso: $F'(x) = 2t$, $G(x) = \arctan t$, di conseguenza $F(x) = t^2$, mentre $G'(x) = \frac{1}{1+t^2}$.

Anche in questo caso si può procedere come nella risoluzione dell'integrale della Fila 1 ponendo $x = t^2$. Il risultato sarà il seguente:

$$(x-9)\log\left(3+\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}x + 3\sqrt{x} + C.$$

Fila 4 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\sqrt[3]{x}\; dx.$$

Siamo in un situazione analoga a quella degli esercizi precedenti, effettuiamo quindi un cambiamento di variabile: $x = t^3$, per cui $dx = 3t^2 dt$. Sostituiamo nell'integrale proposto ed applichiamo la formula di integrazione per parti [2]:

$$\int 3t^2 \arctan t \; dt = t^3 \arctan t - \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt \tag{4}$$

Ci siamo ricondotti al calcolo di un integrale di funzione razionale. Scomponiamo il numeratore in modo che il suo grado sia inferiore a quello del denominatore. Anche in questo caso, dato che abbiamo a che fare con polinomi molto elementari, la scomposizione è piuttosto evidente: $t^3 = t(1+t^2) - t$.

$$\int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t(1+t^2)-t}{1+t^2}\, dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt =$$

(per la proprietà di linearità dell'integrale)

$$= \int t\, dt - \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt =^{3} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right) + C$$

Tenuto conto della sostituzione di partenza l'integrale proposto ha come risultato:

$$\int \arctan\sqrt[3]{x}\; dx = x\arctan\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) + C.$$

[2] $\int F'(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx$, si pone in questo caso: $F'(x) = 3t^2$, $G(x) = \arctan t$, di conseguenza $F(x) = t^3$, mentre $G'(x) = \frac{1}{1+t^2}$.

[3] nell'integrale abbiamo moltiplicato e diviso per 2 in modo da avere al numeratore della frazione la derivata del denominatore.