Risoluzione degli esercizi della prova parziale scritta del 19/12/2003 : Studi di Funzione.

FILA 1

La funzione data è un polinomio di terzo grado, ha quindi come dominio $\mathbb{R}$, dove risulta infinite volte derivabile.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del suo dominio calcolando i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - x^2 - 5x + 1 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty.$$

Perchè:

$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Esaminiamo la possibilità dell'esistenza di asintoti per $x \to \pm\infty$ calcolando i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 5 + \frac{1}{x} = +\infty$$

La funzione non ammette asintoti per $x \to \pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione studiandone il segno e gli evetuali zeri per determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo di f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

Osserviamo che:

$f'(x) = 0$ per $x_{1,2} = -1,\ \frac{5}{3}$.

Di conseguenza si avrà che:

$f'(x) > 0$ per i valori di x esterni all'intervallo $(-1, \frac{5}{3})$, mentre risulta $f'(x) < 0$ per i valori di x interni all'intervallo $(-1, \frac{5}{3})$.

Come conseguenza:

f è crescente su $(-\infty, -1)$ e su $(\frac{5}{3}, +\infty)$,

f è decrescente su $(-1, \frac{5}{3})$.

Calcoliamo la derivata seconda di f studiandone il segno e gli eventuali zeri per determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa e gli eventuali flessi.

$$f''(x) = 6x - 2$$

Osserviamo che:

$f''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{3}$, $f''(x) > 0$ per $x > \frac{1}{3}$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < \frac{1}{3}$.

Da cui otteniamo che:

f è convessa per $x > \frac{1}{3}$,

f è concava per $x < \frac{1}{3}$.

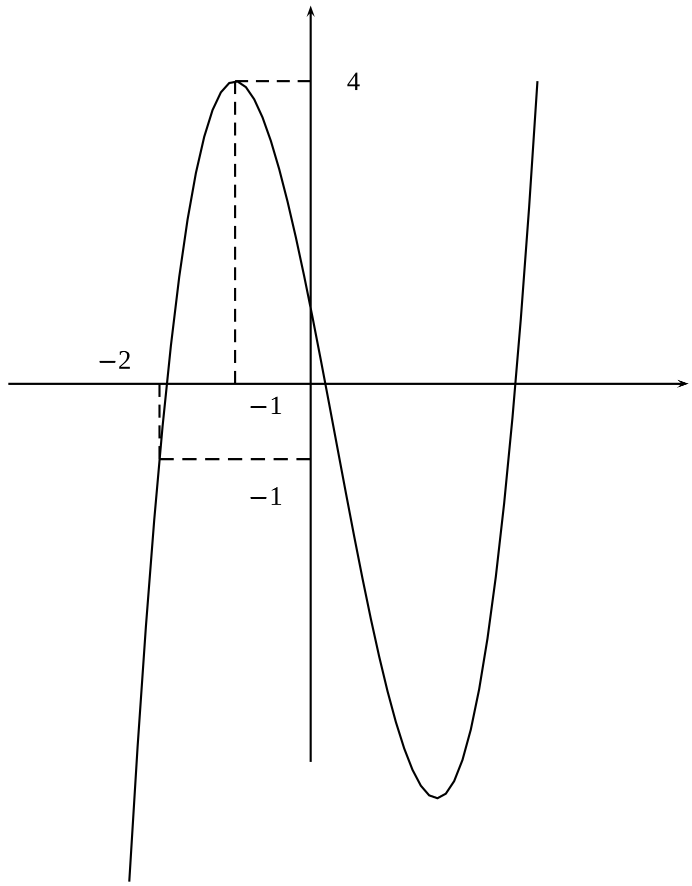
Il punto $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso per f.

Calcoliamo i valori assunti dalla funzione in alcuni punti notevoli:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{5}{3}$	$-\frac{148}{27}$
-1	4
$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{27}$
-2	-1

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico della funzione.

Grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$.



Risoluzione punto d).

Abbiamo osservato all'inizio che la funzione data risulta continua sul suo dominio, inoltre agli estremi dell'intervallo $(-2,-1)$ essa assume valori di segno opposto (vedi tabella sopra). Per il teorema degli zeri esiste almeno un valore $x_o \in (-2,-1)$ dove $f(x_o) = 0$. Abbiamo anche osservato che per $x < -1$ $f'(x) > 0$ dunque, essendo f' diversa da zero in un intervallo, f è iniettiva sull'intervallo considerato. Quindi il punto x_o è l'unica radice dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Calcoliamo un valore approssimato della radice mediante il metodo delle tangenti.

La retta tangente al grafico di f nel punto $(x', f(x')) = (-2,-1)$ ha equazione:

$$\varphi(x) = f(x') + f'(x')(x - x') = -1 + 11(x+2),$$

da cui:

$$\varphi(x) = 11x + 21$$

L'intersezione della retta φ con l'asse x mi dà un valore approssimato per difetto x_d della radice x_o :

$$\varphi(x_d) = 0 \iff 11x_d + 21 = 0 \iff x_d = -\frac{21}{11}.$$

Un valore approssimato per eccesso x_e di x_o si determina con il metodo delle corde. Determiniamo l'equazione della retta ψ che unisce i punti $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ e $(x_2, y_2) = (-1, 4)$, appartenenti al grafico di f, mediante la formula della geometria analitica:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

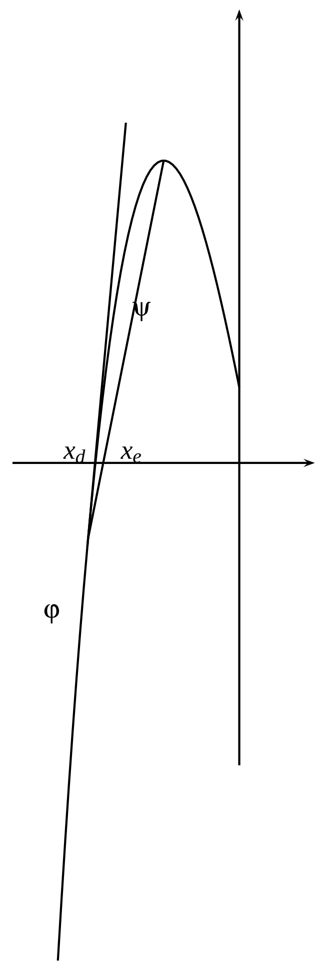
da cui si ottiene che ψ ha equazione:

$$y = 5x + 9$$

L'intersezione di ψ con l'asse x rappresenta un valore approssimato per eccesso di x_o.

$$\psi(x_e) = 0 \iff x_e = -\frac{9}{5}.$$

La differenza tra x_e e x_d risulta inferiore a $0,2$.



FILA 2 Come nell'esercizio precedente la funzione è un polinomio di terzo grado, ha quindi come dominio $\mathbb{R}$, dove risulta infinite volte derivabile.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del suo dominio calcolando i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - 3x - 1 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty.$$

Perchè:

$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Esaminiamo la possibilità dell'esistenza di asintoti per $x \to \pm\infty$ calcolando i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 3 - \frac{1}{x} = +\infty$$

La funzione non ammette asintoti per $x \to \pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione studiandone il segno e gli evetuali zeri per determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo di f.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Osserviamo che:

$f'(x) = 0$ per $x_{1,2} = \pm 1$.

Si avrà che:

$f'(x) > 0$ per i valori di x esterni all'intervallo $(-1,1)$, mentre risulta $f'(x) < 0$ per i valori di x interni all'intervallo $(-1,1)$.

Come conseguenza:

f è crescente su $(-\infty,-1)$ e su $(1,+\infty)$,

f è decrescente su $(-1,1)$.

Calcoliamo la derivata seconda di f studiandone il segno e gli eventuali zeri per determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa e gli eventuali flessi.

$$f''(x) = 6x$$

Osserviamo che:

$f''(x) = 0$ per $x = 0$, $f''(x) > 0$ per $x > 0$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < 0$.

Da cui otteniamo che:

f è convessa per $x > 0$,

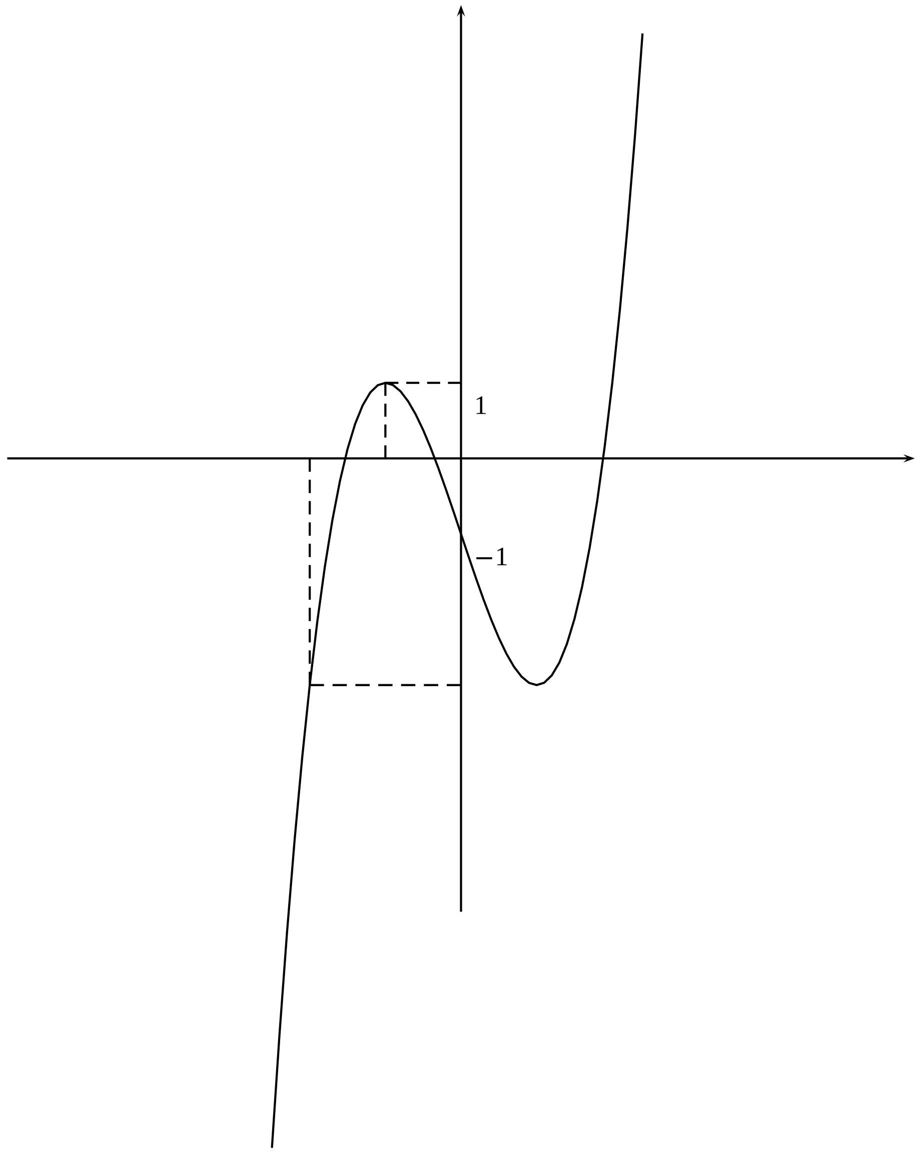
f è concava per $x < 0$.

Il punto $x = 0$ è un punto di flesso per f.

Calcoliamo i valori assunti dalla funzione in alcuni punti notevoli:

x	$f(x)$
0	-1
1	-3
-1	1
-2	-3

Grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x - 1$.



Risoluzione punto d).

La funzione data risulta continua sul suo dominio, inoltre agli estremi dell'intervallo $(-2,-1)$ essa assume valori di segno opposto (vedi tabella sopra). Per il teorema degli zeri esiste almeno un valore $x_o \in (-2,-1)$ dove $f(x_o) = 0$. Abbiamo anche osservato che per $x < -1$ $f'(x) > 0$ dunque, essendo f' diversa da zero in un intervallo, f è iniettiva sull'intervallo considerato. Quindi il punto x_o è l'unica radice dell'equazione:

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Calcoliamo un valore approssimato della radice mediante il metodo delle tangenti.

La retta tangente al grafico di f nel punto $(x', f(x')) = (-2,-3)$ ha equazione:

$$\varphi(x) = f(x') + f'(x')(x - x') = -3 + 9(x+2),$$

da cui:

$$\varphi(x) = 9x + 15$$

L'intersezione della retta φ con l'asse x mi dà un valore approssimato per difetto x_d della radice x_o :

$$\varphi(x_d) = 0 \iff 9x_d + 15 = 0 \iff x_d = -\frac{5}{3}.$$

Un valore approssimato per eccesso x_e di x_o si determina con il metodo delle corde. Determiniamo l'equazione della retta ψ che unisce i punti $(x_1, y_1) = (-2, -3)$ e $(x_2, y_2) = (-1, 1)$, appartenenti al grafico di f, mediante la formula della geometria analitica:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

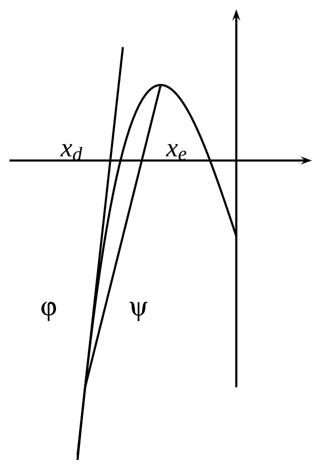
da cui si ottiene che ψ ha equazione:

$$y = 4x + 5$$

L'intersezione di ψ con l'asse x rappresenta un valore approssimato per eccesso di x_o.

$$\psi(x_e) = 0 \iff x_e = -\frac{5}{4}.$$

La differenza tra x_e e x_d risulta inferiore a $0,5$.



FILA 3

La funzione data è un polinomio di terzo grado, ha quindi come dominio $\mathbb{R}$, dove risulta infinite volte derivabile.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del suo dominio calcolando i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - x^2 - 5x = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - 5\frac{1}{x^2}\right) = \pm\infty.$$

Perchè:

$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$,

Esaminiamo la possibilità dell'esistenza di asintoti per $x \to \pm\infty$ calcolando i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - 5x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 5 = +\infty$$

La funzione non ammette asintoti per $x \to \pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione studiandone il segno e gli evetuali zeri per determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo di f.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

Osserviamo che:

$f'(x) = 0$ per $x_{1,2} = -1,\ \frac{5}{3}$.

Di conseguenza si avrà che:

$f'(x) > 0$ per i valori di x esterni all'intervallo $(-1, \frac{5}{3})$, mentre risulta $f'(x) < 0$ per i valori di x interni all'intervallo $(-1, \frac{5}{3})$.

Come conseguenza:

f è crescente su $(-\infty, -1)$ e su $(\frac{5}{3}, +\infty)$,
f è decrescente su $(-1, \frac{5}{3})$.

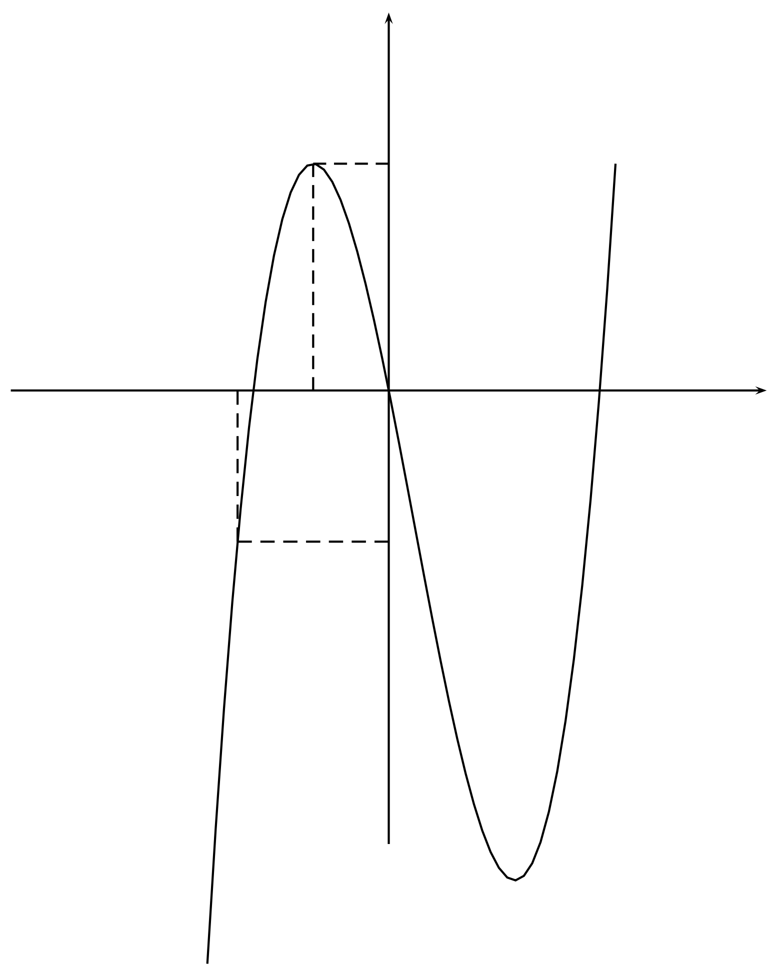
Calcoliamo la derivata seconda di f studiandone il segno e gli eventuali zeri per determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa e gli eventuali flessi.

$$f''(x) = 6x - 2$$

Osserviamo che:
$f''(x) = 0$ per $x = \frac{1}{3}$, $f''(x) > 0$ per $x > \frac{1}{3}$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < \frac{1}{3}$.
Da cui otteniamo che:
f è convessa per $x > \frac{1}{3}$,
f è concava per $x < \frac{1}{3}$.
il punto $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso per f.
Calcoliamo i valori assunti dalla funzione in alcuni punti notevoli:

x	$f(x)$
0	0
$\frac{5}{3}$	$-\frac{175}{27}$
-1	3
$\frac{1}{3}$	$-\frac{47}{27}$
-2	-2

Grafico della funzione $f(x) = x^3 - x^2 - 5x$.



Risoluzione punto d).

La funzione data risulta continua sul suo dominio, inoltre agli estremi dell'intervallo $(-2,-1)$ essa assume valori di segno opposto (vedi tabella sopra). Per il teorema degli zeri esiste almeno un valore $x_o \in (-2,-1)$ dove $f(x_o) = 0$. Abbiamo anche osservato che per $x < -1$ $f'(x) > 0$ dunque, essendo f' diversa da zero in un intervallo, f è iniettiva sull'intervallo considerato. Quindi il punto x_o è l'unica radice dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 5x = 0.$$

Calcoliamo un valore approssimato della radice mediante il metodo delle tangenti.

La retta tangente al grafico di f nel punto $(x', f(x')) = (-2,-2)$ ha equazione:

$$\varphi(x) = f(x') + f'(x')(x - x') = -2 + 11(x+2),$$

da cui:

$$\varphi(x) = 11x + 20$$

L'intersezione della retta φ con l'asse x mi dà un valore approssimato per difetto x_d della radice x_o :

$$\varphi(x_d) = 0 \iff 11x_d + 20 = 0 \iff x_d = -\frac{20}{11}.$$

Un valore approssimato per eccesso x_e di x_o si determina con il metodo delle corde. Determiniamo l'equazione della retta ψ che unisce i punti $(x_1, y_1) = (-2,-2)$ e $(x_2, y_2) = (-1,3)$, appartenenti al grafico di f, mediante la formula della geometria analitica:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

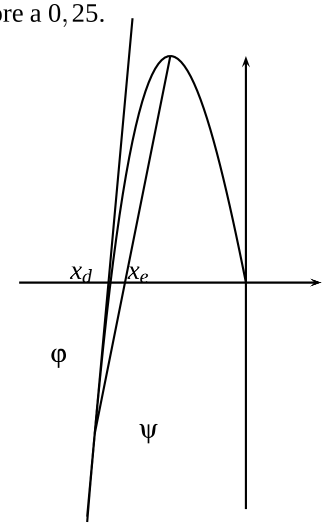
da cui si ottiene che ψ ha equazione:

$$y = 5x + 8$$

L'intersezione di ψ con l'asse x rappresenta un valore approssimato per eccesso di x_o.

$$\psi(x_e) = 0 \iff x_e = -\frac{8}{5}.$$

La differenza tra x_e e x_d risulta inferiore a $0,25$.



FILA 4 La funzione è un polinomio di terzo grado, ha quindi come dominio $\mathbb{R}$, dove risulta infinite volte derivabile.

Determiniamo l'andamento della funzione agli estremi del suo dominio calcolando i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - x^2 - x + 1 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty.$$

Perchè:

$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Esaminiamo la possibilità dell'esistenza di asintoti per $x \to \pm\infty$ calcolando i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

La funzione non ammette asintoti per $x \to \pm\infty$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione studiandone il segno e gli evetuali zeri per determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo di f.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Osserviamo che:

$f'(x) = 0$ per $x_{1,2} = -1,\ \frac{1}{3}$.

Di conseguenza si avrà che:

$f'(x) > 0$ per i valori di x esterni all'intervallo $(-1, \frac{1}{3})$, mentre risulta $f'(x) < 0$ per i valori di x interni all'intervallo $(-1, \frac{1}{3})$.

Come conseguenza:

f è crescente su $(-\infty, -1)$ e su $(\frac{1}{3}, +\infty)$,

f è decrescente su $(-1, \frac{1}{3})$.

Calcoliamo la derivata seconda di f studiandone il segno e gli eventuali zeri per determinare gli intervalli dove risulta concava o convessa e gli eventuali flessi.

$$f''(x) = 6x + 2$$

Osserviamo che:

$f''(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{3}$, $f''(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{3}$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{3}$.

Da cui otteniamo che:

f è convessa per $x > -\frac{1}{3}$,

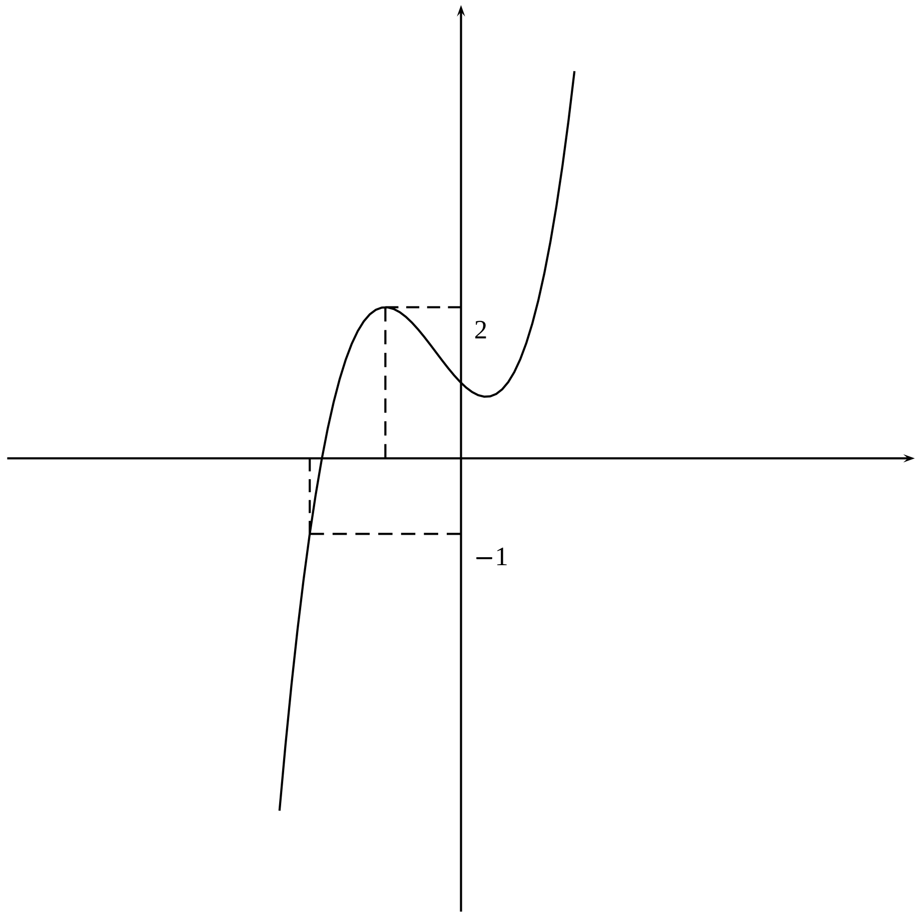
f è concava per $x < -\frac{1}{3}$.

il punto $x = -\frac{1}{3}$ è un punto di flesso per f.

Calcoliamo i valori assunti dalla funzione in alcuni punti notevoli:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{27}$
-1	2
-2	-1
$-\frac{1}{3}$	$\frac{38}{27}$

Grafico della funzione $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.



Risoluzione punto d).

La funzione data risulta continua sul suo dominio, inoltre agli estremi dell'intervallo $(-2,-1)$ essa assume valori di segno opposto (vedi tabella sopra). Per il teorema degli zeri esiste almeno un valore $x_o \in (-2,-1)$ dove $f(x_o) = 0$. Abbiamo anche osservato che per $x < -1$ $f'(x) > 0$ dunque, essendo f' diversa da zero in un intervallo, f è iniettiva sull'intervallo considerato. Quindi il punto x_o è l'unica radice dell'equazione:

$$x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Calcoliamo un valore approssimato della radice mediante il metodo delle tangenti.

La retta tangente al grafico di f nel punto $(x', f(x')) = (-2,-1)$ ha equazione:

$$\varphi(x) = f(x') + f'(x')(x - x') = -1 + 7(x+2),$$

da cui:

$$\varphi(x) = 7x + 13$$

L'intersezione della retta φ con l'asse x mi dà un valore approssimato per difetto x_d della radice x_o :

$$\varphi(x_d) = 0 \iff 7x_d + 13 = 0 \iff x_d = -\frac{13}{7}.$$

Un valore approssimato per eccesso x_e di x_o si determina con il metodo delle corde. Determiniamo l'equazione della retta ψ che unisce i punti $(x_1, y_1) = (-2,-1)$ e $(x_2, y_2) = (-1,2)$, appartenenti al grafico di f, mediante la formula della geometria analitica:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

da cui si ottiene che ψ ha equazione:

$$y = 3x + 5$$

L'intersezione di ψ con l'asse x rappresenta un valore approssimato per eccesso di x_o.

$$\psi(x_e) = 0 \iff x_e = -\frac{5}{3}.$$

La differenza tra x_e e x_d risulta inferiore a $0,2$.