ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 20/12/2004 - FILA 1

ESERCIZIO 1

2 Studiare la funzione

$$f(x) = \log^3 x \ - \ 3\log x$$

determinando in particolare

a) campo di esistenza ed eventuali asintoti;
b) intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo relativo, se esistono;
c) gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi;
d) il grafico approssimato.

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente limite usando la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^2) + 2\sqrt{1-x^2} - 2}{x - \sin x}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare

$$\int \frac{\cos x}{(1+3\sin x)(1-4\sin x)} \ dx$$

ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 20/12/2004 - FILA 2

ESERCIZIO 1

Studiare la funzione
$$f(x) = \log^4 x \;\; - \;\; 4 \log x$$
determinando in particolare

a) campo di esistenza ed eventuali asintoti;
b) intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo relativo, se esistono;
c) gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi;
d) il grafico approssimato.

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente limite usando la formula di Taylor

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos x}{e^x - 1 - \log(1+x)}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare

$$\int \frac{\cos x}{(\sin x)(1 + 2\sin x)} \; dx$$

ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 20/12/2004 - FILA 3

ESERCIZIO 1

Studiare la funzione

$$f(x) = \log^3 x \ - \ 9 \log x$$

determinando in particolare

a) campo di esistenza ed eventuali asintoti;
b) intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo relativo, se esistono;
c) gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi;
d) il grafico approssimato.

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente limite usando la formula di Taylor

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x - \sin x}{\log(1 - x^2) \ - \ 2\sqrt{1 - x^2} + 2}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare

$$\int \frac{\sin x}{(1 - 3\cos x)(1 - 5\cos x)} \ dx$$

ANALISI MATEMATICA

CORSO C - CdL INFORMATICA

Prova scritta del 20/12/2004 - FILA 4

ESERCIZIO 1

Studiare la funzione
$$f(x) = \log^4 x \;\; - \;\; 16 \log x$$
determinando in particolare

a) campo di esistenza ed eventuali asintoti;
b) intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo relativo, se esistono;
c) gli intervalli dove risulta concava o convessa ed eventuali flessi;
d) il grafico approssimato.

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente limite usando la formula di Taylor

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[4]{1+4x} - x - \cos x}{\sin x - \log(1+x)}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare

$$\int \frac{\sin x}{(\cos x)(1 + 2\cos xx)} \;\; dx$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

FILA 1

Esercizio N.1

Il C.E. della funzione è dato dall'insieme $\{x : x > 0\}$ dove è definita la funzione *logaritmo*. Valutiamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio mediante i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Studio della derivata prima:

$$f'(x) = 3\frac{(\log x)^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{3}{x}[(\log x)^2 - 1]$$

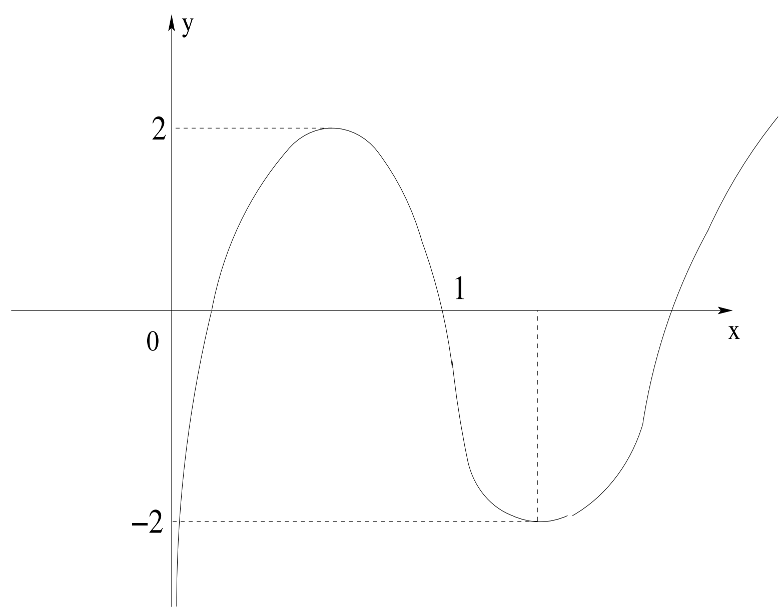
Il segno di f' è determinato dal segno di $(\log x)^2 - 1$. Posto $y = \log x$ si ha che $y^2 - 1 > 0$ per $y > 1$ o $y < -1$. Mentre $y^2 - 1 < 0$ per $-1 < y < 1$. Da cui $(\log x)^2 - 1 > 0$ per $\log x > 1$ oppure $\log x < -1$ che equivalgono a $x > e$ oppure $0 < x < \frac{1}{e}$.

Quindi $f'(x) > 0$ per $x > e$ oppure $0 < x < \frac{1}{e}$, mentre $f'(x) < 0$ per $\frac{1}{e} < x < e$. Da queste considerazioni otteniamo che f cresce negli intervalli $(0, \frac{1}{e})$ e $(e, +\infty)$ mentre decresce in $(\frac{1}{e}, e)$. Di conseguenza il punto $x = \frac{1}{e}$ è di massimo relativo, mentre $x = e$ è di minimo relativo.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2}[(\log x)^2 - 1] + \frac{3}{x^2}2\log x = -\frac{3}{x^2}[(\log x)^2 - 2\log x - 1]$$

Il segno di f'' è determinato dal segno di $[(\log x)^2 - 2\log x - 1]$. Poniamo $y = \log x$. Il polinomio $y^2 - 2y - 1$ assume segno positivo per valori di y esterni all'intervallo delle radici: $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$. Da cui $f''(x) < 0$ per $x \in \left(0, e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}\right)$ oppure $x \in \left(e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, +\infty\right)$, in questi intervalli f risulta concava. Mentre $f''(x) > 0$ per $x \in \left(e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}, e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, in questo intervallo f risulta convessa. In particolare i punti $x = e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ e $x = e^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ sono punti di flesso.



Esercizi 2
Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Posto $y = x^2$, otteniamo

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Mentre da

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha\frac{\alpha-1}{2}y^2 + o(y^2),$$

posto $y = -x^2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right) - 2}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + 2 - x^2 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) - 2}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{3}{4}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0+} -\frac{9}{2}x = 0$$

Esercizio 3
Nell'integrale proposto effetuiamo il cambiamento di variabile ponendo

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x \;\; dx.$$

Da cui

$$\int \frac{\cos x}{(1+3\sin x)(1-4\sin x)}\, dx = \int \frac{1}{(1+3t)(1-4t)}\, dt$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(1+3t)(1-4t)} = \frac{A}{1+3t} + \frac{B}{1-4t}$$

ovvero

$$\frac{1}{(1+3t)(1-4t)} = \frac{A - 4At + B + 3Bt}{(1+3t)(1-4t)}$$

Questa identità è verificata dai valori di A, B che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -4A + 3B = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $A = \frac{3}{7},\ B = \frac{4}{7}$. Sostituendo questi valori nell'integrale proposto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+3t)(1-4t)}\,dt &= \int \frac{3}{7}\frac{1}{1+3t}\,dt + \int \frac{4}{7}\frac{1}{1-4t}\,dt = \\
&= \frac{1}{7}\log|1+3t| - \frac{1}{7}\log|1-4t| + C = \frac{1}{7}\log\left|\frac{1+3t}{1-4t}\right| + C = \\
&= \frac{1}{7}\log\left|\frac{1+3\sin x}{1-4\sin x}\right| + C
\end{aligned}$$

FILA 2

Esercizio N.1

Il C.E. della funzione è dato dall'insieme $\{x : x > 0\}$ dove è definita la funzione *logaritmo*. Valutiamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio mediante i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Studio della derivata prima:

$$f'(x) = 4\frac{(\log x)^3}{x} - \frac{4}{x} = \frac{4}{x}[(\log x)^3 - 1]$$

Il segno di f' è determinato dal segno di $(\log x)^3 - 1$. Posto $y = \log x$ si ha che $y^3 - 1 > 0$ per $y > 1$. Mentre $y^3 - 1 < 0$ per $y < 1$. Da cui $(\log x)^3 - 1 > 0$ per $\log x > 1$ che equivale a $x > e$.

Quindi $f'(x) > 0$ per $x > e$, mentre $f'(x) < 0$ per $0 < x < e$. Da queste considerazioni otteniamo che f cresce nell' intervallo $(e, +\infty)$ mentre decresce in $(0, e)$. Di conseguenza il punto $x = e$ è di minimo relativo.

Studio della derivata seconda.

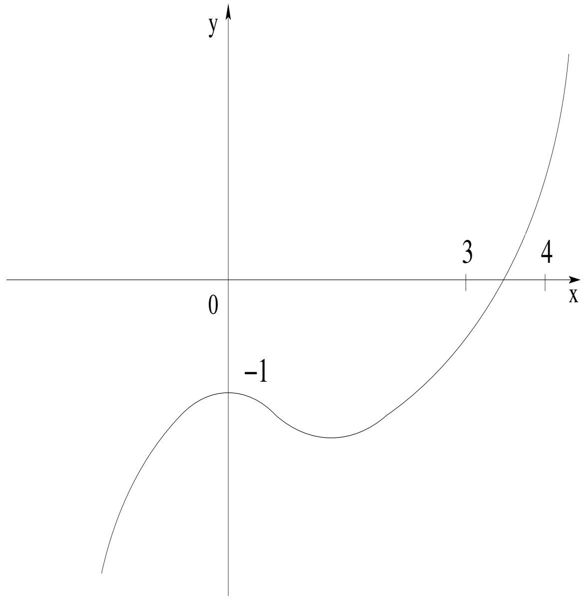
$$f''(x) = -\frac{4}{x^2}[(\log x)^3 - 1] + \frac{4}{x^2}3(\log x)^2 = -\frac{4}{x^2}[(\log x)^3 - 3(\log x)^2 - 1]$$

Il segno di f'' è determinato dal segno di $[(\log x)^3 - 3(\log x)^2 - 1]$. Poniamo $y = \log x$, e studiamo il segno del polinomio $\varphi(y) = y^3 - 3y^2 - 1$. Per questo consideriamo la funzione φ calcoliamo le sue derivate:

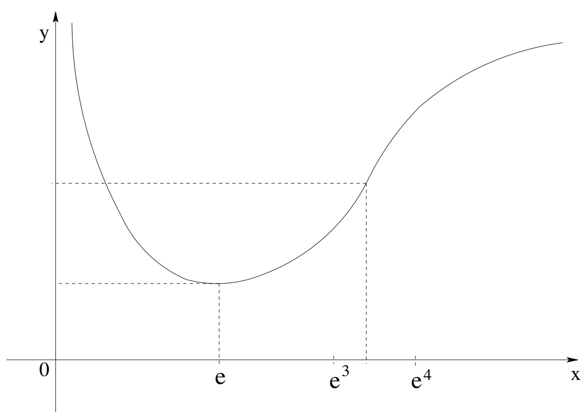
$$\varphi'(y) = 3y^2 - 6y = 3y(y-2)$$

$$\varphi''(y) = 6y - 6 = 6(y-1)$$

Da queste relazioni otteniamo che φ è crescente in $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$. Decresce in $(0, 2)$. Il punto $y = 0$ è di massimo relativo, mentre $y = 2$ è di minimo relativo. $\varphi(0) = -1$. Il grafico di φ è il seguente:



Osserviamo che φ ha uno zero nel punto y_0 compreso tra $y = 3$ e $y = 4$. Risulta positiva per $y > y_0$ e negativa per $y_0 < y$. Da cui f'' ha uno zero in un punto x_0 compreso tra e^3 e e^4. $f'' > 0$ per $0 < x < x_0$ e $f'' < 0$ per $x > x_0$. f è convessa per $0 < x < x_0$, f è concava per $x > x_0$. Nel punto x_0 la funzione ha un flesso. Il grafico di f in definitiva è il seguente



Esercizi 2
Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.

$$(1 + y)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha\frac{\alpha - 1}{2}y^2 + o(y^2),$$

posto $y = 3x$ e $\alpha = \frac{1}{3}$, otteniamo

$$\sqrt[3]{1 + 3x} = 1 - \frac{1}{3}(3x) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{9x^2}{2} + o(x^2).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 + x - x^2 - x - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} =$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Esercizio 3
Nell'integrale proposto effetuiamo il cambiamento di variabile ponendo

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x \;\; dx.$$

Da cui
$$\int \frac{\cos x}{\sin x(1+2\sin x)}\, dx = \int \frac{1}{t(1+2t)}\, dt$$
Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t}$$
ovvero
$$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A+2At+Bt}{t(1+2t)}$$
Questa identità è verificata dai valori di A, B che risolvono il sistema:
$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$
Risolvendo otteniamo $A = 1,\ B = -2$. Sostituendo questi valori nell'integrale proposto:
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t(1+2t)}\, dt &= \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{2}{1+2t}\, dt = \\ &= \log|t| - \log|1+2t| + C = \log\left|\frac{t}{1+2t}\right| + C = \\ &= \log\left|\frac{\sin x}{1+2\sin x}\right| + C \end{aligned}$$

FILA 3

Esercizio N.1
Il C.E. della funzione è dato dall'insieme $\{x : x > 0\}$ dove è definita la funzione *logaritmo*.
Valutiamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio mediante i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Studio della derivata prima:

$$f'(x) = 3\frac{(\log x)^2}{x} - \frac{9}{x} = \frac{3}{x}[(\log x)^2 - 3]$$

Il segno di f' è determinato dal segno di $(\log x)^2 - 3$. Posto $y = \log x$ si ha che $y^2 - 3 > 0$ per $y > \sqrt{3}$ o $y < -\sqrt{3}$. Mentre $y^2 - 3 < 0$ per $-\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$. Da cui $(\log x)^2 - 3 > 0$ per $\log x > \sqrt{3}$ oppure $\log x < -\sqrt{3}$ che equivalgono a $x > e^{\sqrt{3}}$ oppure $0 < x < e^{-\sqrt{3}}$.

Quindi $f'(x) > 0$ per $x > e^{\sqrt{3}}$ oppure $0 < x < e^{-\sqrt{3}}$, mentre $f'(x) < 0$ per $e^{-\sqrt{3}} < x < e^{\sqrt{3}}$. Da queste considerazioni otteniamo che f cresce negli intervalli $(0, e^{-\sqrt{3}})$ e $(e^{\sqrt{3}}, +\infty)$ mentre decresce in $(e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$. Di conseguenza il punto $x = e^{-\sqrt{3}}$ è di massimo relativo, mentre $x = e^{\sqrt{3}}$ è di minimo relativo.
Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2}[(\log x)^2 - 3] + \frac{3}{x^2} 2 \log x = -\frac{3}{x^2}[(\log x)^2 - 2\log x - 3]$$

Il segno di f'' è determinato dal segno di $[(\log x)^2 - 2\log x - 3]$. Poniamo $y = \log x$. Il polinomio $y^2 - 2y - 3$ assume segno positivo per valori di y esterni all'intervallo delle radici: $(-1, 3)$. Da cui $f''(x) < 0$ per $x \in \left(0, e^{-1}\right)$ oppure $x \in \left(e^3, +\infty\right)$, in questi intervalli f risulta concava. Mentre $f''(x) > 0$ per $x \in (e^{-1}, e^3)$, in questo intervallo f risulta convessa. In particolare i punti $x = e^{-1}$ e $x = e^3$ sono punti di flesso. Il frafico di f è simile a quello della Fila 1.

Esercizi 2

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Posto $y = -x^2$, otteniamo

$$\log(1 - x^2) = -x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Mentre da

$$(1 + y)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha \frac{\alpha - 1}{2} y^2 + o(y^2),$$

posto $y = -x^2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right) + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{3}{4}x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{3}{4}x^4} = +\infty$$

Esercizio 3

Nell'integrale proposto effetuiamo il cambiamento di variabile ponendo

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x \ \ dx.$$

Da cui

$$\int \frac{\sin x}{(1-3\cos x)(1-5\cos x)}\, dx = -\int \frac{1}{(1-3t)(1-5t)}\, dt$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(1-3t)(1-5t)} = \frac{A}{1-3t} + \frac{B}{1-5t}$$

ovvero

$$\frac{1}{(1-3t)(1-5t)} = \frac{A - 5At + B - 3Bt}{(1-3t)(1-5t)}$$

Questa identità è verificata dai valori di A, B che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -5A - 3B = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $A = -\frac{3}{2}, \ B = \frac{5}{2}$. Sostituendo questi valori nell'integrale proposto:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-3t)(1-5t)}\, dt &= \int \frac{3}{2}\frac{1}{1-3t}\, dt - \int \frac{5}{2}\frac{1}{1-5t}\, dt = \\ &= -\frac{1}{2}\log|1-3t| + \frac{1}{2}\log|1-5t| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-5t}{1-3t}\right| + C = \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-5\cos x}{1-3\cos x}\right| + C \end{aligned}$$

FILA 4

Esercizio 1

Svolgimento analogo a quello della Fila 2.

Esercizi 2

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha\frac{\alpha-1}{2}y^2 + o(y^2),$$

posto $y = 4x$ e $\alpha = \frac{1}{4}$, otteniamo

$$\sqrt[4]{1+4x} = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - x - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -2$$

Esercizio 3
Nell'integrale proposto effetuiamo il cambiamento di variabile ponendo

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x \ \ dx.$$

Da cui

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(1+2\cos x)}\,dx = -\int \frac{1}{t(1+2t)}\,dt$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t}$$

ovvero

$$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A+2At+Bt}{t(1+2t)}$$

Questa identità è verificata dai valori di A, B che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $A = 1, \ B = -2$. Sostituendo questi valori nell'integrale proposto:

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{t(1+2t)}\,dt &= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int 2\frac{1}{1+2t}\,dt = \\ &= -\log|t| + \log|1+2t| + C = \log\left|\frac{1+2t}{t}\right| + C = \\ &= \log\left|\frac{1+2\cos x}{\cos x}\right| + C \end{aligned}$$